

**Sujet pour section bilingue francophone**

**SESSION 2012**

**MATHÉMATIQUES**

**- DURÉE DE L'ÉPREUVE: 2 HEURES -  
- TOUS LES SUJETS SONT OBLIGATOIRES. 10 POINTS SONT ACCORDÉS D'OFFICE. -**

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé pour cette épreuve**

**Partie 1 : connaissances**

**30 points**

**1<sup>ère</sup> partie : QCM (15 points)**

Pour chaque question de cet exercice, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La somme des solutions complexes de l'équation  $z^4 - z^2 - 12 = 0$  est égale à :

A : 0	B : 1	C : -12	D : aucune des 3 réponses précédentes
-------	-------	---------	---------------------------------------

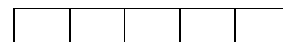
2.  $(U_n)$  est une suite telle que  $U_3 = -5$  et  $U_6 = 40$  ; si  $(U_n)$  est arithmétique alors  $U_3 + U_4 + \dots + U_7 =$  :

A : 100	B : 200	C : 70	D : aucune des 3 réponses précédentes
---------	---------	--------	---------------------------------------

3.  $\ln(\sqrt{5} - 2) + \ln(\sqrt{5} + 2)$  est égale à :

A : $2\ln(\sqrt{5})$	B : $\ln 5$	C : 0	D : $\ln 9$
----------------------	-------------	-------	-------------

4. On veut colorier à l'aide de quatre couleurs différentes le motif ci-contre :  
Il y a :



A : $C_5^4 = 5$ coloriages possibles.	B : $5 \times 4 = 20$ coloriages possibles.	C : $5^4 = 625$ coloriages possibles.	D : $4^5 = 1024$ coloriages possibles.
---------------------------------------	---	---------------------------------------	--

**2<sup>ème</sup> partie : questions de cours (15 points)**

**Question n° 1 :**

Un questionnaire à choix multiple (QCM) est constitué de 6 questions. Pour chacune d'entre elles, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard.

- Déterminer le nombre de réponses possibles à ce QCM.
- a – Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 4 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses.  
b – Combien y a-t-il de possibilités que le candidat réponde correctement à exactement 4 questions ?

**Question n° 2 :**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (unité : 2cm.)

On désigne par  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points du plan ayant pour affixes respectives :

$$z_A = 4 + \frac{5}{2}i ; z_B = 4 - \frac{5}{2}i \text{ et } z_C = 2 + \frac{3}{2}i.$$

- Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans un repère.
- Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?
- (D) désigne l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie la relation :  $|z - 4 - \frac{5}{2}i| = |z - 2 - \frac{3}{2}i|$ .  
Quelle est la nature de (D) ? (donner une démonstration algébrique (en posant  $z = x + iy$ ) ou une démonstration géométrique)

Partie 2 : compétences

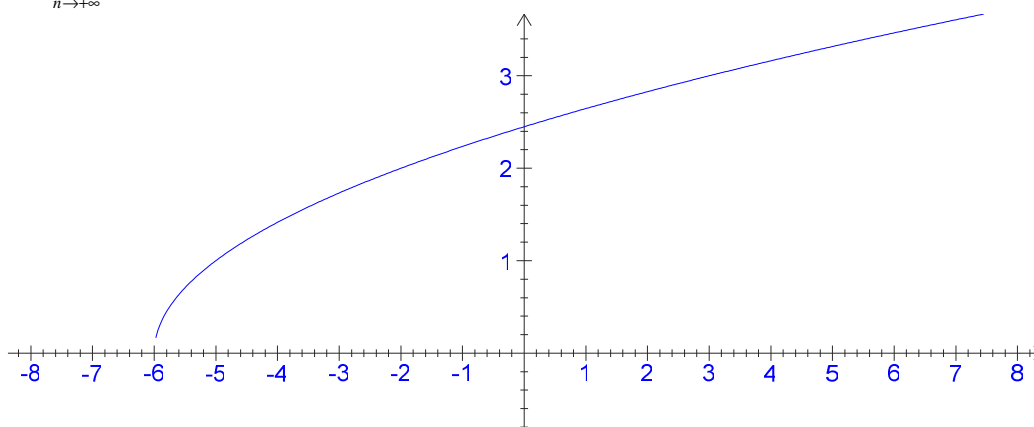
60 points

Exercice n° 1 : 25 points

Soit  $(u_n)$  la suite définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

On admet que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$ .

- Représenter les 4 premiers termes de  $(u_n)$  sur le graphique ci-dessous :
- Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- Démontrer que  $(u_n)$  est convergente.
- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .



Exercice n° 2 : 35 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2 + \cos x) e^{1-x}$ .

- Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f(x) > 0$ .
- Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$ .
  - En déduire que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $2 + \cos x + \sin x > 0$ .
  - Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$ .
  - En déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
  - Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Quel théorème permet d'établir que, sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$ , l'équation  $f(x) = 3$  admet une solution unique  $\alpha$  ?

# MATHÉMATIQUES

## CORRIGÉ

### SESSION 2012

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.

### 1<sup>ère</sup> partie : QCM (15 points)

*3,75 points par bonne réponse*

1. A
2. D
3. C
4. D

### 2<sup>ème</sup> partie : questions de cours (15 points)

#### Question n° 1 :

Un questionnaire à choix multiple (QCM) est constitué de 6 questions. Pour chacune d'entre elles, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard.

1. Déterminer le nombre de réponses possibles à ce QCM. (2 points)

Le nombre de réponses possibles à ce QCM est  $3^6 = 729$ .

2. a – Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 4 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses. (2 points)

Pour chacune des quatre premières questions, il n'y a qu'une seule réponse possible ; à chacune des questions 5 et 6, il y a deux résultats (faux) possibles. Et, à chaque réponse fautive à  $q_5$ , on peut associer une réponse fautive à  $q_6$ .

Il y a donc  $2 \times 2 = 4$  cas où les réponses aux quatre premières questions sont exactes et deux autres fausses.

b – Combien y a-t-il de possibilités que le candidat réponde correctement à exactement 4 questions ? (2 points)

Il y a  $C_6^2$  façons de choisir deux questions parmi 6 et d'après a –, il y a 4 cas pour que les réponses du candidat à quatre questions précises soient exactes et fausses aux deux autres.

Il y a donc  $4 \times C_6^2 = 60$  cas pour que le candidat réponde correctement à exactement quatre questions.

**Question n° 2 :**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (unité : 2cm.)

On désigne par  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points du plan ayant pour affixes respectives :

$$z_A = 4 + \frac{5}{2}i ; z_B = 4 - \frac{5}{2}i \text{ et } z_C = 2 + \frac{3}{2}i.$$

1. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans un repère. (ci-après) (2 points)
2. Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ? (3 points)

$$z_A = 4 + \frac{5}{2}i ; z_B = 4 - \frac{5}{2}i ; z_C = 2 + \frac{3}{2}i$$

Il faut utiliser la forme complexe pour calculer les longueurs :

$$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = \left| (4-4) + i\left(-\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right) \right|^2 = |-5i|^2 = 5^2 = 25$$

$$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = \left| (2-4) + i\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) \right|^2 = |-2 - i|^2 = 5$$

$$BC^2 = |z_C - z_B|^2 = \left| (2-4) + i\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) \right|^2 = |-2 + 4i|^2 = 20$$

$AB^2 = BC^2 + AC^2$  donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

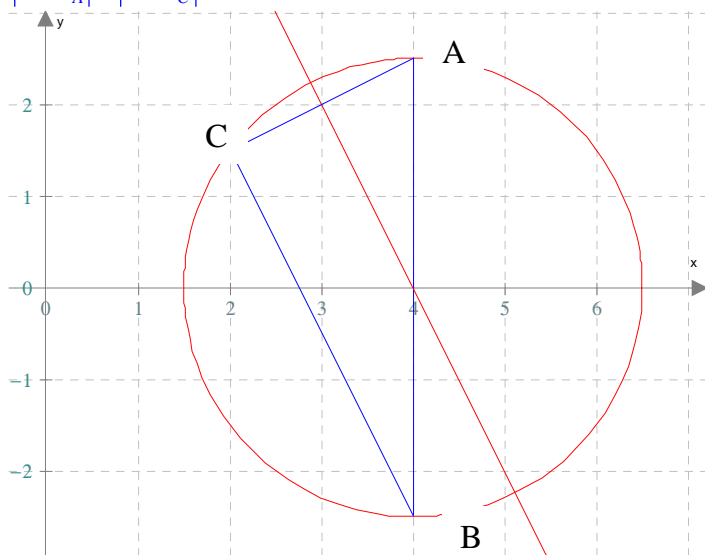
3. (D) désigne l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie la relation :  $|z - 4 - \frac{5}{2}i| = |z - 2 - \frac{3}{2}i|$ .

Quelle est la nature de (D) ? (donner une démonstration algébrique (en posant  $z = x + iy$ ) ou une démonstration géométrique) (4 points)

$$\left| z - 4 - \frac{5}{2}i \right| = \left| z - 2 - \frac{3}{2}i \right|$$

Cette relation équivaut à

$$|z - z_A| = |z - z_C|, \text{ c'est à dire } AM = MC.$$



$$\left| z - 4 - \frac{5}{2}i \right| = \left| z - 2 - \frac{3}{2}i \right|$$

$$\left| x + iy - 4 - \frac{5}{2}i \right| = \left| x + iy - 2 - \frac{3}{2}i \right|$$

$$\left| x - 4 + i\left(y - \frac{5}{2}\right) \right| = \left| x - 2 + i\left(y - \frac{3}{2}\right) \right|$$

$$(x-4)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = (x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}$$

$$4x + 2y - 16 = 0$$

$$2x + y - 8 = 0$$

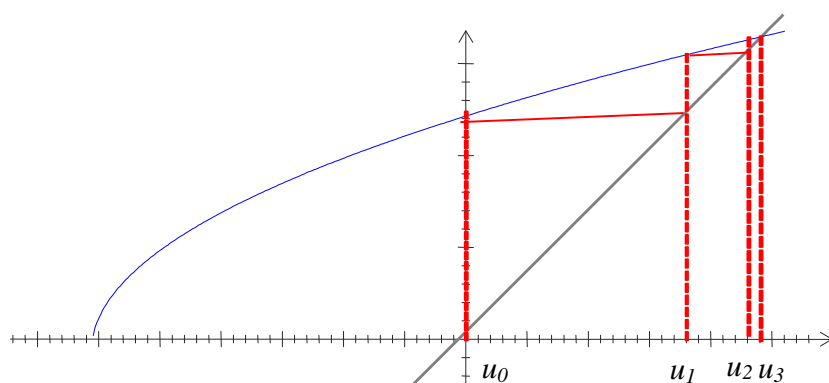
$$y = -2x + 8$$

(D) est donc la médiatrice du segment  $[AC]$ .

Exercice n° 1 : 25 points

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ . On admet que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$ .

a) Représenter les 4 premiers termes de  $(u_n)$  sur le graphique ci-dessous : (5 points)



b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante. (6 points)

On note  $P(n)$  la proposition «  $u_n \leq u_{n+1}$  ».

**Initialisation** :  $P(0)$  est vraie car  $u_0 \leq u_1$  (en effet  $u_0 = 0$  et  $u_1 = \sqrt{6}$ ).

**Hérédité** : on considère que pour un entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ .

Alors  $u_n + 6 \leq u_{n+1} + 6$  et  $\sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{u_{n+1} + 6}$  car la fonction racine carrée est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

Donc  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$  et  $P(n+1)$  est vraie.

**Conclusion** : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ . La suite  $(u_n)$  est croissante.

c) Démontrer que  $(u_n)$  est convergente. (6 points)

$(u_n)$  est croissante et majorée, donc elle converge vers un réel  $l$  (d'après le théorème de la convergence monotone).

d) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . (8 points)

Comme  $f : x \mapsto \sqrt{x+6}$  est continue sur  $[0 ; +\infty[$ ,  $l$  est tel que  $l = f(l)$ , soit  $l = \sqrt{l+6}$ .

Comme  $l \geq 0$ , on a  $l^2 = l+6$  et  $l^2 - l - 6 = 0$ .

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$  donc le trinôme admet deux racines :

$$l_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ et } l_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2} = -2.$$

Et comme  $l \geq 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ .

## Exercice n° 2 : 35 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2 + \cos x) e^{1-x}$ .

1. Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f(x) > 0$ . (4 points)

Pour tout  $x$  réel,  $\cos x \geq -1 \Leftrightarrow 2 + \cos x \geq 1$  donc  $2 + \cos x > 0$  de plus, on sait que pour tout réel  $x$ ,  $e^{1-x} > 0$ . On en déduit que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) > 0$ .

2. a) Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$ . (4 points)

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left( \cos x \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin x \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \cos x + \sin x$$

- b) En déduire que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $2 + \cos x + \sin x > 0$ . (4 points)

Or, pour tout réel  $x$ ,  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -1 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 2 - \sqrt{2}$ . Sachant que  $2 - \sqrt{2} > 0$  et d'après l'égalité ci-dessus, on en déduit que  $2 + \cos x + \sin x > 0$ .

- c) Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ . (5 points)

$f$  est le produit de deux fonction dérivables sur  $\mathbb{R}$  : la fonction  $u : x \mapsto 2 + \cos x$ , composée de la fonction cosinus par une fonction affine et la fonction  $v : x \mapsto e^{1-x}$  composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle.

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f' = u'v + uv'$ . D'après le théorème donnant la fonction dérivée d'une fonction composée,  $u'(x) = -\sin x$  et  $v'(x) = -e^{1-x}$  d'où :

$$f'(x) = -e^{1-x} (2 + \cos x + \sin x). \text{ Or on a montré que } 2 + \cos x + \sin x > 0 \text{ et on sait que pour tout réel } x, e^{1-x} > 0.$$

On en déduit que  $f'(x) < 0$  sur  $\mathbb{R}$  et donc que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

3. a) Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$ . (4 points)

On sait que, pour tout réel  $x$ ,  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos x \leq 3$  et donc, puisque  $e^{1-x} > 0$ , on a bien  $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$ .

- b) En déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . (5 points)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  donc, par composition,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$ . Puisque  $f(x) \geq e^{1-x}$ , on en déduit, par comparaison, que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  donc, par composition,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{1-x} = 0$ .

Puisque  $0 \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$ , on en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

- c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de  $f$  en  $+\infty$ . (4 points)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  donc l'axe des abscisses est une asymptote pour la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ .

4. Quel théorème permet d'établir que, sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$ , l'équation  $f(x) = 3$  admet une solution unique  $\alpha$ ? (5 points)

La fonction  $f$  est dérivable, elle est donc continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus, on a montré que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Or  $f(0) = 3e > 3$  et  $f(\pi) = e^{1-\pi} < 3$ .

On en déduit, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires** (ou **théorème de la bijection**), qu'il existe une unique solution  $\alpha$  à l'équation  $f(x) = 3$ .