Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=2$ și $a_2=1$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-2x-m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\log_2(x-1)=\log_2 12$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 3.

5p **5.** Calculați $\vec{a}\cdot\vec{b}$, știind că $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ și unghiul vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

5p **6.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(0,1)$ și $C(3,1)$. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru n număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați suma elementelor matricei A.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(2n+1,n)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinați valorile numărului natural n, $n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu n^2-3.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=x+ay+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ calculați $2011\circ 2012$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $a=-1$ rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x\circ 2^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+n)e^x$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că funcția f_{2011} este o primitivă a funcției f_{2012}.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx\geq\dfrac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul n, folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

- **SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

1.	$a_2 - a_1 = r \Rightarrow r = -1$	**2p**
	$a_3 = 0$	**2p**
	Finalizare: produsul este egal cu 0	**1p**
2.	$\Delta = 4 + 4m < 0$	**3p**
	$m \in (-\infty, -1)$	**2p**
3.	$x(x-1) = 12 \Rightarrow x = -3$ sau $x = 4$	**3p**
	$x = 4$ convine, $x = -3$ nu convine	**2p**
4.	$p = \dfrac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$	**1p**
	Numărul numerelor $\overline{abc}$ pentru care $a \cdot b \cdot c = 3$ este egal cu $3 \Rightarrow 3$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul numerelor naturale de trei cifre este de $900 \Rightarrow 900$ cazuri posibile	**1p**
	$p = \dfrac{1}{300}$	**1p**
5.	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2}$	**3p**
	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$	**2p**
6.	$B(0,1)$ şi $C(3,1) \Rightarrow BC \parallel Ox$, deci $x_H = x_A = 1$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC	**2p**
	$BH \perp AC \Rightarrow m_{BH} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \dfrac{y_H - 1}{1} \cdot \dfrac{-2}{2} = -1$	**2p**
	$y_H = 2$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Suma elementelor matricei A este egală cu $1 + (2n+1) + n + 1 + (2n^2+1) + n^2 + 1 =$	**3p**
	$= 3n^2 + 3n + 5$	**2p**
b)	$\det A = n^2 - n$	**2p**
	Finalizare: $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	**3p**
c)	$A = \dfrac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$	**1p**
	$n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow n = 2$ sau $n = -3$	**3p**
	Finalizare: $n = 2$	**1p**
2.a)	$2011 \circ 2012 = 2011 + 2012 + 1 =$	**3p**
	$= 4024$	**2p**
b)	$(x \circ y) \circ z = x + ay + az + 2$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$	**2p**
	$x \circ (y \circ z) = x + ay + a^2 z + a + 1$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$	**2p**
	$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1$	**1p**

c)	$2^x = t \Rightarrow t^2 - t = 0$ Finalizare: $x = 0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$	**2p**
	$f'(x) = (x + \ln x)' = 1 + \dfrac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$	**2p**
	$f(1) = 1,\ f'(1) = 2$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y = 2x - 1$	**1p**
c)	$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	**2p**
	$f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	**2p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	$\int_0^1 f_1(x)\,dx = (x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx =$	**2p**
	$= \left((x+1)e^x - e^x\right)\Big|_0^1 = e$	**3p**
b)	f_{2011} derivabilă și $f_{2011}'(x) = \left((x+2011)e^x\right)' = e^x + (x+2011)e^x = (x+2012)e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$f_{2011}' = f_{2012}$	**2p**
c)	$(x+n)e^x \geq (x+n)(x+1)$, pentru orice $x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$	**1p**
	$\int_0^1 (x+n)e^x\,dx \geq \int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx$	**1p**
	$\int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx = \left(\dfrac{x^3}{3} + (n+1)\dfrac{x^2}{2} + nx\right)\Big|_0^1 = \dfrac{9n+5}{6}$	**2p**
	Finalizare	**1p**