Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{5}$ este natural.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2+mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2-x^2\right)=\log_2 x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.

5p **6.** Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a+b=\frac{\pi}{3}$. Arătați că $2\cos b=\cos a+\sqrt{3}\sin a$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}x & 1 & 2\\ 2 & x & 1\\ 1 & y & x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$.

5p **a)** Calculați $D(-1,2)$.

5p **b)** Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2,q)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că există cel puțin o pereche $\left(x,y\right)$ de numere reale, cu $x\neq y$, pentru care $D(x,y)=D(y,x)$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f=X^3+X-m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f\left(X\right)$ la $X-1$ să fie egal cu 8.

5p **b)** Arătați că numărul $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este întreg, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** În cazul $m=2$ determinați patru numere întregi a,b,c,d, cu $a>0$, astfel încât polinomul $g=aX^3+bX^2+cX+d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Calculați $f'(0)$.

5p **b)** Arătați că, pentru fiecare număr natural $n\geq 2$, ecuația $f(x)=n$ are exact o soluție în intervalul $\left(0,+\infty\right)$.

5p **c)** Fie x_n unica soluție din intervalul $\left(0,+\infty\right)$ a ecuației $f(x)=n$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\frac{\pi}{2}$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței S.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^{2\pi}f^n(kx)\,dx=\int_0^{2\pi}f^n(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\geq 1$.

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(\sqrt{5}-1)^2+2\sqrt{5}=\left(5-2\sqrt{5}+1\right)+2\sqrt{5}=$	**3p**
	$=6\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(x)=0$ are două soluții reale distincte	**2p**
	$\Delta=m^2-16>0$	**1p**
	$m\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$	**2p**
3.	$2-x^2=x$	**1p**
	$x_1=1,\ x_2=-2$	**2p**
	x_1 convine şi x_2 nu convine	**2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	**1p**
	Numărul submulțimilor cu cel mult un element este egal cu $C_7^0+C_7^1=8\Rightarrow 8$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul submulțimilor mulțimii A este $2^7=128\Rightarrow 128$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{1}{16}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=5\vec{i}+12\vec{j}$	**3p**
	$AC=\sqrt{5^2+12^2}=13$	**2p**
6.	$b=\dfrac{\pi}{3}-a\Rightarrow\cos b=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-a\right)=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}\cos a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin a$, de unde concluzia	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(-1,2)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$	**1p**
	$D(-1,2)=-1+1+8+2+2+2$	**3p**
	$D(-1,2)=14$	**1p**
b)	$A(2,q)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & q & 2\end{pmatrix}$	**1p**
	Există minorul $d=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow \text{rang } A(2,q)\geq 2$	**1p**
	$\text{rang } A(2,q)=2\Rightarrow D(2,q)=0$	**1p**
	$q=-\dfrac{1}{2}$	**2p**

c)	$D(x,y)=x^3+4y-4x-xy+1$	**1p**
	$D(y,x)=y^3+4x-4y-yx+1$	**1p**
	$D(x,y)=D(y,x)\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-8)=0\Rightarrow x^2+xy+y^2-8=0$	**2p**
	Finalizare: de exemplu $(x,y)=(0,2\sqrt{2})$	**1p**
2.a)	$f(1)=2-m$	**2p**
	$f(1)=8$	**2p**
	Finalizare: $m=-6$	**1p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=-2\in\mathbb{Z}$	**3p**
c)	x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+X-2\Rightarrow$ polinomul $-2X^3+X^2+1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$	**2p**
	$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ cu $a>0\Rightarrow g=2X^3-X^2+0\cdot X-1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$	**2p**
	un exemplu este $a=2,\ b=-1,\ c=0,\ d=-1$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f'(0)=0$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $\left[0,+\infty\right)$, deci ecuația dată are cel puțin o soluție	**3p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\left[0,+\infty\right)\Rightarrow f$ este injectivă pe $\left[0,+\infty\right)$, deci soluția este unică	**2p**
c)	$f\left(x_n\right)=n\Rightarrow e^{x_n}=n+x_n\Rightarrow e^{x_n}>n$ pentru că $x_n>0$, oricare ar fi $n\geq 2$	**2p**
	$x_n>\ln n\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$	**3p**
2.a)	$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\|f(x)\right\|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**2p**
	$=\sin x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$	**3p**
b)	$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=$	**1p**
	$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{2}\left(x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi^2}{4}$	**4p**
c)	$t=kx\Rightarrow \int_0^{2\pi}f^n(kx)\,dx=\frac{1}{k}\int_0^{2k\pi}\cos^n t\,dt$	**2p**
	$\int_0^{2k\pi}\cos^n t\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^n t\,dt+\int_{2\pi}^{4\pi}\cos^n t\,dt+\ldots+\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\cos^n t\,dt=$	**2p**

	$= k\int_0^{2\pi} \cos^n t\,dt$, deoarece $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_n(x)=\cos^n x$ este periodică de perioadă 2π, de unde concluzia	**1p**