**Examenul de bacalaureat național 2018**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Arătați că numărul $n=\log_3\left(\sqrt{7}-2\right)+\log_3\left(\sqrt{7}+2\right)$ este natural.

**5p** **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+6x+3$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2)^3=(2-x)^3$.

**5p** **4.** Calculați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$.

**5p** **5.** Punctele $M$, $N$ și $P$ verifică relația $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}=\vec{0}$. Calculați lungimea segmentului $MP$, știind că $MN=3$.

**5p** **6.** Arătați că $\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=0$, pentru orice număr real $x$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ x & 1 & y \end{pmatrix}$, unde $x$ și $y$ sunt numere reale.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(2,3))=12$.

**5p** **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr natural $n$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $x$ pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

**2.** Se consideră polinomul $f=nX^n+X^2-nX-1$, unde $n$ este număr natural, $n\geq 3$.

**5p** **a)** Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 3$.

**5p** **b)** Arătați că, dacă $n$ este număr natural impar, $n\geq 3$, atunci polinomul $f$ este divizibil cu $X^2-1$.

**5p** **c)** Arătați că, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 5$, polinomul $f$ **nu** are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$, pentru orice număr real $x$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg} x+x$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$.

**5p** **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{e-1}{e}$.

**5p** **b)** Arătați că orice primitivă a funcției $f$ este concavă pe $(0,+\infty)$.

**5p** **c)** Pentru fiecare număr natural nenul $n$, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

**Examenul de bacalaureat național 2018**

**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $n=\log_3\left(\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)\right)=\log_3\left(7-4\right)=$ | **3p** |
| | $=\log_3 3=1\in\mathbb{N}$ | **2p** |
| **2.** | $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-1=x^2+6x+3\Leftrightarrow x^2+4x+4=0$ | **2p** |
| | Coordonatele sunt $x=-2$ și $y=f(-2)=-5$ | **3p** |
| **3.** | $(x+2)^3=(2-x)^3\Leftrightarrow x+2=2-x$ | **3p** |
| | $x=0$ | **2p** |
| **4.** | Cifra zecilor poate fi aleasă în 4 moduri | **2p** |
| | Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4=16$ numere | **3p** |
| **5.** | $NP=2$ | **2p** |
| | Punctul $P$ aparține segmentului $MN$, deci $MP=MN-NP=1$ | **3p** |
| **6.** | $\sin(\pi-x)=\sin x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(2\pi-x)=-\sin x$ | **3p** |
| | $\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=\sin x+\sin x+(-\sin x)+(-\sin x)=0$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(2,3)=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2,3)\right)=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=12+1+18-4-6-9=12$ | **3p** |
| **b)** | $\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)=\begin{vmatrix}n^2&n&1\\1&n^2&n\\n^2&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\1&n^2&n\\1&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\0&n^2-n&n-1\\0&1-n&n-1\end{vmatrix}=$ | **3p** |
| | $=\left(n^2+n+1\right)(n-1)^2(n+1)\geq 0$, pentru orice număr natural $n$ | **2p** |
| **c)** | $B=\begin{pmatrix}x^2+x&1&x\\2x&x^2&1\\x^2+1&x&x\end{pmatrix}\Rightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=\begin{pmatrix}x^3+2x^2+1&2x&x^2+x\\3x^2+x&x^3+1&2x\\x^3+x^2+2x&x^2+x&x^2+1\end{pmatrix}$ | **3p** |
| | Inversa matricei $B$ este matricea $A(x,0)\Leftrightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=I_3$, deci $x=0$ | **2p** |
| **2.a)** | $f(1)=n\cdot 1^n+1^2-n\cdot 1-1=$ | **3p** |
| | $=n+1-n-1=0$, pentru orice număr natural $n$, $n\geq 3$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | Pentru $n$ număr natural impar, $n\ge 3$, $f(-1)=n\cdot(-1)^n+(-1)^2-n\cdot(-1)-1=0$, deci polinomul $f$ este divizibil cu $X+1$ | **2p** |
| | $f(1)=0\Rightarrow f$ este divizibil cu $X-1$, deci polinomul $f$ este divizibil cu $X^2-1$ | **3p** |
| **c)** | Dacă $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ este o rădăcină a polinomului $f$ care are coeficienții întregi, atunci $\alpha=\frac{1}{d}$, unde $d\in\mathbb{Z}^*\setminus\{\pm1\}$ este un divizor al lui $n$ | **1p** |
| | $f(\alpha)=0\Rightarrow\frac{n}{d^n}+\frac{1}{d^2}-\frac{n}{d}-1=0\Rightarrow d^{n-2}\left(d^2+nd-1\right)=n\Rightarrow d^{n-2}/n$, deci $\lvert d\rvert^{n-2}\le n$ | **2p** |
| | Cum $\lvert d\rvert^{n-2}\ge 2^{n-2}>n$ pentru orice număr natural $n$, $n\ge 5$, obținem o contradicție, deci polinomul $f$ nu are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=(\operatorname{arctg}x)'-(x)'=\frac{1}{x^2+1}-1=$ | **2p** |
| | $=\frac{1-x^2-1}{x^2+1}=-\frac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ | **3p** |
| **b)** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-1\right)=-1$ | **2p** |
| | $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{arctg}x-x+x)=\frac{\pi}{2}$, deci dreapta de ecuație $y=-x+\frac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ | **3p** |
| **c)** | $f(x)+g(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x$, $x\in\mathbb{R}\Rightarrow(f(x)+g(x))'=\frac{1}{x^2+1}+\frac{-1}{x^2+1}=0$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| | Cum $f(0)+g(0)=\frac{\pi}{2}$, obținem că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| **2.a)** | $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big\vert_0^1=$ | **3p** |
| | $=-\frac{1}{e}+1=\frac{e-1}{e}$ | **2p** |
| **b)** | $F$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| | $F''(x)=-2xe^{-x^2}<0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția $F$ este concavă pe $(0,+\infty)$ | **3p** |
| **c)** | $I_{n+1}-I_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{1}f(x)dx-\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)dx=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}f(x)dx\ge 0$, deci $I_{n+1}\ge I_n$, pentru orice număr natural nenul $n$ | **1p** |
| | $0\le I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}e^{-x^2}dx\le\int_{\frac{1}{n}}^{1}1dx=1-\frac{1}{n}<1$, pentru orice număr natural nenul $n$ | **3p** |
| | Șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este monoton și mărginit, deci șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent | **1p** |