

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul b_8 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_5 = 3$ și $b_6 = 6$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 3$. Arătați că $(f \circ f)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \lg x = \lg(5x + 6)$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităților.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(-1,-2)$ și $C(a,-2)$, unde a este număr real nenul, $a \neq -1$. Determinați numărul real a pentru care ortocentrul triunghiului ABC este O .
- 5p** 6. În triunghiul ABC , $AB = 6$, $AC = 3\sqrt{6}$ și $B = \frac{\pi}{3}$. Determinați măsura unghiului C .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(\sqrt{2})) = 3$.
- 5p** b) Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Determinați numărul întreg k pentru care $A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) = kA(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x \circ y = 3xy - 2x - 2y + 2$.
- 5p** a) Arătați că numărul $\frac{1}{3} \circ \frac{1}{3}$ este întreg.
- 5p** b) Arătați că $x \circ x \geq \frac{2}{3}$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $x \circ x \circ x = e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p** c) Demonstrați că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) < f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.
2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^4 f^4(x) dx = 21$.

5p | **b)** Calculați $\int_0^1 f(e^x) dx$.

5p | **c)** Arătați că $\int_1^4 e^{f(x)} dx = 2e^2$.