Logaritmi

1.Definiţia logaritmului unui număr pozitiv

Fie a>0 un număr real pozitiv,$a \neq 1$.Considerăm ecuaţia exponenţială

ax=N,N>0 (1)

Ecuaţia (1) are o soluţie care este unic determinată.Această soluţie se notează

X=logaN (2)

şi se numeşte logaritmul numărului pozitiv baza a.

Din (1) şi (2) obţinem egalitatea

alogaN=N (3)

care ne arată că logaritmul unui număr real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicată baza a ($a>0, a \neq 1$)pentru a obţine numărul dat

Dacă in (1) facem x=1,obţinem a1=a şi deci

logaa=1 (4)

Exemple

Să se calculeze log232.

Cum 25=32,atunci din definiţia logaritmului avem log232=5.

Să se determine $\log_2 \frac{1}{16}$.

Din egalitatea $2^{-4}=\frac{1}{16}$,obţinem $\log_2 \frac{1}{16}=-4$.

3)Să să determine log1/327.

Să considerăm ecuaţia exponenţială $\left(\frac{1}{3}\right)^x=27$.Cum $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{3^{-3}}=27$,obţinem x=-3 şi deci log1/327=-3.

4)Să se determine log4256.

Cum $4^4=256$,atunci din definiţia logaritmului obţinem log4256=4.

Observaţii

1.În practică se folosesc logaritmii în bază zece care se mai numesc şi logaritmi zecimali.Aceştia se notează cu lg în loc de log10;de aceea nu mai este nevoie să se specifice baza.Astfel,vom scrie lg106 în loc de log10106 şi lg5 în loc de log105 etc.

2.În matematica superioară apar foarte des logaritmi care au ca bază numărul iraţional,notat cu e,e=2,718281828… .Folosirea acestor logaritmi permite simplificarea multor formule matematice.Logaritmii în baza e apar în rezolvarea unor probleme de fizică şi intră în mod natural în descrierea matematică a unor procese chimice,biologice.De aceea aceşti logaritmi se numesc naturali.Logaritmul natural al numărului a se notează lna.

2.Funcţia logaritmică

Fie $a>0, a \neq 1$ un număr real.La punctul 1 am definit noţiunea de logaritm în baza a;

fiecărui număr pozitiv N i s-a asociat un număr real bine determinat.Acest lucru ne permite să definim o funcţie

$f:(0,+\infty)\to\Re$,f(x)=logax numită funcţie logaritmică.

Proprietăţile funcţiei logaritmice:

1.f(1)=0.
Cum a0=1 rezultă că loga1=0 şi deci f(1)=0.
2.Funcţia logaritmică este monotonă.Dacă a>1,atunci funcţia logaritmică este strict crescătoare,iar dacă 0<a<1,funcţia logaritmică este strict descrescătoare.
Să considerăm cazul a>1 şi fie $x1,x2\in(0,+\infty)$ astfel încât x1<x2.Cum x1=alogax1 şi X2=alogax2,rezultă că alogax1<alogax2.
Dar funcţia exponenţială fiind crescătoare obţinem că logax1<logax2,adică f(x1)<f(x2).
În cazul 0<a<1,din inegalitatea alogax1<alogax2 şi din faptul că funcţia exponenţială cu baza un număr real 0<a<1 este strict descrescătoare,rezultă că logax1>logax2,adică f(x1)>f(x2).
3.Funcţia logaritmică este bijectivă
Dacă $x1,x2\in(0,+\infty)$ astfel încât f(x1)=f(x2),atunci din logax1=logax2.Dar din egalitatea (3) de la punctul 1 obţinem x1=alogax1 şi x2=alogax2,adică x1=x2.Deci f este o funcţie injectivă.
Fie $y\in\Re$ un număr real oarecare.Notăm cu x=ay.Se vede că $x\in(0,+\infty)$ şi logax=logaay=y
Deci f(x)=y,ceea ce ne arată că f este şi surjectivă.Aşadar,f este bijectivă.
4.Inversa funcţiei logaritmice este funcţia exponenţială
Funcţia logaritmică f:$(0,+\infty)\to\Re$,f(x)=logax,fiind bijectivă,este inversabilă.Inversa ei este funcţia exponenţială g $\Re\to(0,+\infty)$,g(x)=ax.
Într-adevăr,dacă $x\in(0,+\infty)$ avem $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\log ax)=a^{\log ax}=x$ şi dacă $y\in\Re$,atunci atunci $(f\circ g)(y)=f(g(y))=f(a^y)=\log_a a^y=y$.

3)Proprietăţile logaritmilor
Folosind proprietăţile puterilor cu exponenţi reali obţinem următoarele proprietăţi pentru logaritmi:
a.Dacă A şi B sunt două numere pozitive,atunci

$\log_a(AB)=\log_a A+\log_a B$

(logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor celor două numere).
Într-adevăr,dacă logaA=x şi logaB=y,atunci $a^x=A$ şi $a^y=B$.Cum $a^{x+y}=a^x*a^y$,obţinem $A^{x+y}=A*B$ şi deci $\log_a(AB)=x+y=\log_a A+\log_a B$.
Observaţie.
Proprietatea se poate da pentru n numere pozitive A1,A2,...,An adică
$\log_a(A_1A_2\ldots A_n)=\log_a A_1+\log_a A_1+\log_a A_2+\ldots+\log_a A_n$.
b.Dacă A şi B sunt două numere pozitive,atunci

$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$$

(logaritmul câtului a două numere este egal cu diferenţa dintre logaritmul numără-

torului şi cel al numitorului).

Într-adevăr,ţinând cont de proprietatea a.,avem logaA=loga $\left(\frac{A}{B} * B\right)$ =loga $\frac{A}{B}$ +logaB,

de unde rezultă că loga $\frac{A}{B}$ =logaA-logaB.

Observaţie.

Dacă punem A=1 şi ţinem cont că loga1=0,obţinem egalitatea:

loga $\frac{1}{B}$ =-logaB

c.Dacă A este un număr pozitiv şi m un număr real arbitrar,atunci

logaAm=mlogaA

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii şi logaritmul numărului).

Într-adevăr,dacă logaA=x,atunci ax=A.Dar atunci Am=(ax)m=amx şi deci logaAm=mx=
=mlogaA.

d.Dacă A este un număr pozitiv şi n un număr natural($n \geq 2$),atunci

loga $\sqrt[n]{A}$ =logaA/n

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii şi logaritmul numărului).

Într-adevar, proprieatea d este un caz particular al proprietăţii c,punând m= $\frac{1}{n}$.

Exemple

1)Să se calculeze log375.

Log375=Log3(3*25)=Log33+Log325=1+Log352=1+2Log35.

2)Să se determine log21000-log2125

Avem log2100-log2125=log2 $\frac{1000}{125}$ =log28=log223=3.

3)Să se calculeze lg0,18-lg180.

Avem lg0,18-lg180=lg $\frac{0,18}{180}$ =lg $\frac{1}{1000}$ =lg10-3=-3.

4)Să se calculeze log6 $\frac{1}{18}$ +log6 $\frac{1}{12}$.

Avem log6 $\frac{1}{18}$ +log6 $\frac{1}{12}$ =-log618-log612=-(log618+log612)=-log6(18*12)=-log663=-3.

5)Să se calculeze log2 $\sqrt[5]{81}$ .Avem log2 $\sqrt[5]{81}$ = $\frac{1}{5}$ log281= $\frac{1}{5}$ log234= $\frac{4}{5}$ log23.

6)Să se calculeze log2 $\sqrt[4]{8}$ .Avem log2 $\sqrt[4]{8}$ = $\frac{1}{4}$ log28= $\frac{1}{4}$ log223= $\frac{3}{4}$ log22= $\frac{3}{4}$.

4.Schimbarea bazei logaritmului aceluiaşi număr

Dacă a şi b sunt două numere pozitive diferite de 1,iar A un număr pozitiv oarecare,are loc egalitatea:

LogaA=LogbA*Logab

Într-adevăr,dacă LogaA=x şi LogbA=y,atunci avem ax=A şi by=A,de unde obţinem ax=by.Dar atunci Logaax=Logaby sau xLogaa=yLogab.

Cum Logaa=1,avem x=yLogab,adică LogaA=LogbA*Logab.

Observaţie.

Dacă în egalitatea de mai sus A=a,obţinem Logaa=Logba*Logab.Cum Logaa=1,rezultă că:

$\text{Logab}=\frac{1}{\log_b a}$

Exemple

1)Să se scrie log2x în funcţie de log4x.

Avem log2x=log4x*log24=2log4x.

2)Să se arate că log26+log62>2.

Avem $\log26+\log62=\log26+\frac{1}{\log_2 6}$.

Deci trebuie să arătăm că $\log26+\frac{1}{\log_2 6}>2$ sau (log26)2-2log26+1>0,sau încă (log26-1)2>0 inegalitate evidentă deoarece $\log26\neq 1$.

5)Operaţia de logaritmare a unei expresii

Să considerăm expresia:

$$E=\frac{17^3\sqrt[4]{131}*\sqrt[3]{92}}{\sqrt[5]{37*98*23}}$$

Vom logaritma expresia într-o anumită bază convenabilă a.Folosind proprietăţile logaritmilor,obţinem:

$$\log_a E=\log_a\left(\frac{17^3\sqrt[4]{131}\sqrt[3]{92}}{\sqrt[5]{37*98*23}}\right)=\log_a 17^3+\log_a\sqrt[4]{131}+\log_a\sqrt[3]{92}-\frac{\log_a(37*98*23)}{5}=$$

$$=3\log_a 17+\frac{1}{4}\log_a 131+\frac{1}{3}\log_a 92-\frac{1}{5}\log_a 37-\frac{1}{5}\log_a 98-\frac{1}{5}\log_a 23.$$

Deci am obţinut egalitatea:

$$\log_a E=3\log_a 17+\frac{1}{4}\log_a 131+\frac{1}{3}\log_a 92-\frac{1}{5}\log_a 37-\frac{1}{5}\log_a 98-\frac{1}{5}\log_a 23.$$

În general,dacă E este o expresie algebrică în care apar produse de puteri şi radicali, putem să-I asociem,exact ca în exemplu de mai sus,o expresie,notată log E,in care apar sume (diferenţe) de logaritmi înmulţite eventual cu anumite numere raţionale.Operaţia prin care expresiei E i se asociază expresia log E se numeşte”operaţie de logaritmare”.

Exemple

Fie $E=a2\sqrt[7]{ab^6}$ .Prin operaţia de logaritmare,obţinem:

loccE=logc(a2 $\sqrt[7]{ab^6}$)=logca2+logc $\sqrt[7]{ab^6}$ =2logca+ $\frac{1}{7}$ logca+ $\frac{6}{7}$ logcb.

2)Fie E= $\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}$ .Prin operaţia de logaritmare,obţinem:

logcE =logc $\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}$ = $\frac{1}{4}$ logc $\frac{a^3}{b^5}$ = $\frac{1}{4}$ (logca3-logcb5)= $\frac{3}{4}$ logca- $\frac{5}{4}$ logcb.

Adesea în calcule este nevoie să se facă şi operaţia inversă,adică unei expresii în care intervin logaritmi să-i asociem o expresie fără logaritmi.

De exemplu,să considerăm expresia logcE=2logca- $\frac{1}{2}$ logcb-3logc3.
Folosind proprietăţiile logaritmilor,avem:

LogcE=logca2-logc $\sqrt{b}$ -logc33=logc $\frac{a^2}{\sqrt{b*3^3}}$ =logc $\frac{a^2}{27\sqrt{b}}$,de unde obţinem că E= $\frac{a^2}{27\sqrt{b}}$.

Ecuaţii şi inecuaţii logaritmice

1)Ecuaţiile logaritmice sunt ecuaţii în care expresiile ce conţin necunoscute apar ca bază sau ca argument al unor logaritmi.

De exemplu:logx+1(x+2)=1;lg(x2+x-2)=3;logx(5x2+3)=lg(2x+3)-1.

Folosind injectivitatea funcţiei exponenţiale,avem că rezolvarea unei ecuaţii de tipul logg(x)f(x)=b este echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei f(x)=g(x)b.Vom avea însă grijă ca soluţiile obţinute să satisfacă f(x)>0,g(x)>0,g(x) $\neq 1$, pentru care expresia logg(x)f(x) are sens.

La fel ca la ecuaţiile exponenţiale,în practică atunci când avem de rezolvat o ecuaţie logaritmică,vom proceda astfel:folosind diverse substituţii precum şi proprietăţile logaritmice,vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuaţii simple,de regulă de gradul întâi sau de gradul al doilea.

Exemplu

Să se rezolve ecuaţia:logx(x2-3x+9)=2.

Obţinem x2-3x+9=x2 şi deci 3x=9,x=3.Deoarece pentru x=3>0,expresia x2-3x+9 este pozitivă,rezultă că x=3 este soluţie a ecuaţiei.

Rezolvarea altor ecuaţii se bazează pe injectivitatea funcţiei logaritmice,şi anume din logaf(x)=logag(x),deducem f(x)=g(x),împunând condiţiile:f(x)>0,g(x)>0

Exemple

1) Să se rezolve ecuaţia:lg(x2-15)=lg(x-3).Deducem că x2-15x=x-3,deci x2-x-12=0 adică x1=4,x2=-3.Deoarece pentru x2=-3 obţinem x-3=-3-3=-6<0,rezultă că x2=-3 nu este soluţie a ecuaţiei.Deci numai 4 este soluţie.

2)Să se resolve ecuaţia:2lg(x-1)= $\frac{1}{2}$ lgx5-lg $\sqrt{x}$.În această ecuaţie punem de la început condiţiile x-1>0,x>0,pentru a avea sens expresiile lg(x-1),lg x5, $\sqrt{x}$, lg $\sqrt{x}$.

Ecuţia se mai scrie 2lg(x-1)= $\frac{5}{2}$ lgx- $\frac{1}{2}$ lgx şi deci 2lg(x-1)=2lgx.Prin urmare,lg(x-1)=lgx,de unde obţinem x-1=x,-1=0,contradicţie;rezultă deci că ecuaţia dată nu are soluţii.

3) Să se rezolve ecuaţia:lg(x+7)+lg(3x+1)=2.Punem condiţiile de existenţă a logaritmilor:x+7>0,3x+1>0,deci x>- $\frac{1}{3}$ .Obţinem lg(x+7)(3x+1)=2 şi deci (x+7)(3x+1)=102=100.Rezultă ecuaţia de gradul al doilea 3x2+22x-93=0,de unde rezultă x1=3,x2=- $\frac{31}{3}$ .Deoarece - $\frac{31}{3}$ <- $\frac{1}{3}$,obţinem că 3 este singura soluţie a ecuaţiei date.

Observaţie

Ecuaţia precedentă nu este echivalentă cu ecuaţia lg(x+7)(3x+1)=2,care are două soluţii x1=3,x2=- $\frac{31}{3}$,deoarece pentru amândouă aceste valori ale lui x,lg(x+7)(3x+1) are sens.

4) Să se rezolve ecuaţia:log23x-3log3x-4=0.Avem condiţia x>0 şi făcând substituţia log3x=y,obţinem y2-3y-4=0.Deci y1=4,y2=-1.Din log3x=4.obţinem x=34,x=81,iar din log3x=-1,obţinem x=3-1,x= $\frac{1}{3}$.

În continuare vom rezolva câteva ecuaţii care nu se pot încadra într-un anumit tip.Astfel,pot apărea ecuaţii cu logaritmi scrişi în diferite baze,ecuaţii în care apar expresii conţinând necunoscute şi la exponenţi şi la logaritmi etc.

5)Să se rezolve ecuaţia:log2x+log3x=1.Deducem,aplicând formula de schimbare a bazei, $\frac{\lg x}{\lg 2}+\frac{\lg x}{\lg 3}=1$ sau lgx= $\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 2+\lg 3}=\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}$. Deci x=10 $^{\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}}$.

6)Să se rezolve ecuaţia:log3x+logx3=2.Deoarece logx3= $\frac{1}{\log_3 x}$,rezultă log3x+ $\frac{1}{\log_3 x}$ =2.Notând log3x=y,obţinem y+ $\frac{1}{y}=2$,adică y2-2y+1=0;deci y=1,adică log3x=1.Prin urmare,x=3.

7)Să se rezolve ecuaţia:xlgx+2=1000.Punem condiţia de existenţă a expresiilor:x>0.Logaritmând,obţinem o ecuaţie echivalentă lg(xlgx+2)=lg1000 care devine (lgx+2)lgx=3.Notând lgx=y,avem y2+2y-3=0 şi deci y1=-3,y2=1.Din lgx=-3,
obţinem x=10-3,x=0,001,iar din lgx=1,rezultă x=10.

2)Sisteme de ecuaţii logaritmice

În astfel de sisteme se aplică metodele arătate anterior la ecuaţiile de tipul respectiv.

Exemplu

Să se rezolve sistemul x2+y2=425
lgx +lgy=2
Obţinem,pe rând sistemele x2+y2=425 x2+y2=425
lgxy =2 $\Leftrightarrow$ xy=1000
x,y>0 x,y>0

Acest sistem simetric îl putem rezolva pe căile cunoscute din clasa a IX-a:punem s=x+y,p=xy şi vom avea s2-2p=425 s2=625 s=$\pm$25
P=100 $\Leftrightarrow$ p=100 $\Leftrightarrow$p=100
Sistemul s=25
P=100 dă soluţiile (5,20),(20,5) care satisfac şi condiţiile de existenţă ale sistemului iniţial,x>,y>0.Sistemul s=-25
P=100 dă soluţiile (-20,-5),(-5,-20),care nu convin.

3)Inecuaţii logaritmice

Rezolvarea inecuaţiilor logaritmice se bazează pe proprietăţile de monotonie ale funcţiei logaritmice.Am văzut că funcţia logaritmică este crescătoare dacă baza este supraunitară şi descrescătoare dacă baza este subunitară.

Exemple

1)Să se rezolve inecuaţia:$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)>-3$.Avem că $-3=\log_{\frac{1}{3}}27$ şi inecuaţia devine $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)>\log_{\frac{1}{3}}27$.Deoarece baza $\frac{1}{3}$ a logaritmului este subunitară (funcţia $g:(0,\infty)\to\Re, g(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$ este

descrescătoare),inecuaţia devine 2x-1<27,adică x<14.În acelaşi timp,din condiţia de existenţă a logaritmului iniţial,avem 2x-1>0,deci x> $\frac{1}{2}$ .Deci obţinem pentru x valorile posibile x $\in\left(\frac{1}{2},14\right)$.

4) Sisteme de inecuaţii logaritmice

În astfel de sisteme se aplică proprietăţile şi metodele arătate anterior la inecuaţiile Logaritmice.Rezolvarea acestora se reduce în definitiv la rezolvarea sistemelor de inecuaţii întâlnite în clasa a IX-a.

Exemplu

Să se rezolve sistemul

$2^{x^{2-2x-3}}$ >2x+1

log3(x2-3x+9)<3. Observăm,mai întâi,că x2-3x+9>0 oricare ar fi x real($\Delta = -27 < 0$)

|x-2|>3 deci logaritmul este definit pentru orice x real.

Deoarece 3=log327 şi,ţinând seama de monotonia funcţiilor exponenţială şi logaritmică,rezultă sistemul echivalent

X2-2x-3>x+1 x2-3x-4>0

X2-3x+9<27 $\Leftrightarrow$ x2-3x-18<0

|x-2|>3 |x-2|>3

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei x2-3x-4>0 este M1=$(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$, mulţimea soluţiilor inecuaţiei x2-3x-18<0 este M2=(-3,6),iar mulţimea soluţiilor inecuaţiei

|x-2|>3 este M3=$(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$. Atunci mulţimea soluţiilor sistemului este

M=M1$\cap M_2 \cap M_3 = (-3,-2)\cup(5,6)$.

Aplicaţii

I.Admiterea în învăţământul superior

1.Să se calculeze expresia:

E=log225-log2$\left(\frac{20}{3}\right)+\log_2\left(\frac{4}{21}\right)$

Informatică,Baia Mare,1997

E=$\log_2 \frac{35}{20} * \frac{4}{21}$ $\Rightarrow$E=$\log_2 35 * \frac{3}{20} * \frac{4}{21} = \log_2 \frac{420}{420} = \log_2 1 = 0$
$\Rightarrow$E=0.

2.Să se rezolve sistemul

xy=40
xlgy=4

Colegiu de Informatică,Cluj,1997

xy=40 $\Rightarrow$y= $\frac{40}{x}$
xlgy=4

lgxlgy=lg4
lgy*lgx=lg4
$\lg \frac{40}{x}$ *lgx=lg4
(lg40-lgx)lgx=lg4
lgx*lg40-lg2x=lg4
lg2x-lgxlg40+lg4=0
Notăm lgx=y
$\Rightarrow$y2-ylg40+lg4=0
Δ =lg240-4lg4=(lg4+lg10)2-4lg4=lg24+2lg4+1-4lg4=lg24-2lg4+1=(lg4-1)2
$\Rightarrow$y1,2= $\frac{\lg 40 \pm (\lg 4 - 1)}{2}$
$\Rightarrow y_1 = \frac{\lg 40 + \lg 4 - 1}{2} = \frac{2 \lg 4}{2} = \lg 4 \Rightarrow \lg x = \lg 4 \Rightarrow x = 4; y = 10$
$\Rightarrow y_2 = \frac{\lg 40 - \lg 4 + 1}{2} = 1 \Rightarrow \lg x = 1 \Rightarrow x = 40; y = 4$

3.Ştiind că log40100=a,să se exprime log1625 în funcţie de a.

Chimie,Metalurgie,1981

Log4100=a $\Rightarrow \frac{\lg 100}{\lg 40} = a \Rightarrow a = \frac{2}{1 + 2\log_{10} 2} = \frac{2}{1 + 2\lg 2} \Rightarrow \lg 2 = \frac{2 - a}{2a}$

$\Rightarrow \log_{16} 25 = \frac{\lg 25}{\lg 16} = \frac{\lg 5^2}{\lg 2^4} = \frac{2 \lg 5}{4 \lg 2} = \frac{\lg 5}{2 \lg 2} = \frac{\lg \frac{10}{2}}{2 \lg 2} \Rightarrow \log_{16} 25 = \frac{1 - \lg 2}{2 \lg 2} = \frac{1 - \frac{2 - a}{2a}}{2 * \frac{2 - a}{2a}} = \frac{3a - 2}{4 - 2a}$

4.Ştiind că a=lg2 şi b=lg3 să se calculeze $x=3^{\log_{27}(\lg 150)^3}$

Matematică-Fizică,Sibiu,1998

$X=3^{\log_{27}(\lg 150)^3}$

$\Leftrightarrow x = 3^{3\log_{27}(\lg 150)} = 27^{\log_{27}(\log 150)} = \lg 150 = \lg 50 + \lg 30 = \lg \frac{100}{2} + \lg 3 = \lg 100 - \lg 2 + b = \log_{10} 100 - \lg 2 + b =$

$= 2 - a + b$

5.Să se arate că expresia: $E=\frac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt[3]{z}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{y} + \log_3 \sqrt[3]{z}}$ este independentă de valorile strict mai mari ca 1 ale variabilelor x,z,y.

Inginerie,Constanţa,1996

$$E = \frac{\log_2(x\sqrt{y\sqrt[3]{z}})}{\log_3(x\sqrt{y\sqrt[3]{z}})}$$

$$\sqrt{y}\sqrt[3]{z} = t \Rightarrow E = \frac{\log_2 t}{\log_3 t} = \frac{\log_2 t}{\frac{\log_2 t}{\log_2 3}} = \log_2 t * \frac{\log_2 3}{\log_2 t} = \log_2 3 \Rightarrow E = \log_2 3$$

Notăm x

II.Concursurile şcolare

1.Gorj2001-faza locală

Să se arate că dacă x,,y,z $\in (0,1)$ are loc inegalitatea:

Logxyz+logyxz+logzxy ≥ 6;

Logxyz+logyxz+logzxy=(logxy+logyx)+(logxz+logzx)+(logyz+logzy) ≥ 6

Dacă x,y $\in (0,1) \Rightarrow \log_x y > 0$

Logxyz+logyxz+logzxy ≥ 6 are loc doar când x=y=z.

2.Bacău2001-faza locală

Să se calculeze:

$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$ =E

Notăm a=log212

Log224=log212*2=log212+log22=a+1

Log962= $\frac{1}{\log_2 96} = \frac{1}{\log_2 12 * 8} = \frac{1}{\log_2 12 + \log_2 8} = \frac{1}{a+3}$

Log2192=log212*16=log212+log216=a+4

Log122= $\frac{1}{\log_2 12} = \frac{1}{a}$

(a+1)(a+3)-a(a+4)=3 $\Rightarrow 3 = 3(A)$

3.Cluj2001-faza locală

Să se rezolve ecuaţia:

$\left[\frac{2 * \log_2 x}{\log^2_2 x + 1}\right] = \cos \pi x,$ unde $[\alpha]$ este partea întreagă a numărului $\alpha \in \Re$.

Cos $\pi x = \{-1,0,1\} \in Z$

$\left[\frac{2 * \log_2 x}{\log^2_2 x + 1}\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{2\log_2 x}{\log^2_2 x + 1} \in [-1,0) \Leftrightarrow \log_2 x < 0 \Rightarrow x \in (0,1)$

I. $S_1 = (0,1) \cap \{2k+1 / k \in Z\} = \varnothing$

$\left[\frac{2\log_2 x}{\log^2_2 x + 1}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{2\log_2 x}{\log_2{}^2 x + 1} \in [0,1) \Leftrightarrow \log_2 x \geq 0; \log_2 x \neq 1 \Rightarrow$

II. $\Rightarrow [1,+\infty) \setminus \{2\} \cap \{2k+1 / k \in Z\} = \{2k+1, k \in N^*\} = S_2$

III. $\left[\frac{2\log_2 x}{\log^2_2 x + 1}\right] = 1 \Rightarrow \frac{2\log_2 x}{\log^2_2 x + 1} \in [1,2] \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$

S3= $\{2k+1 / k \in Z\} \cap \{2\} = \{2\}$

$S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{2k+1, k \in N^*\} \cup \{2\} = S$