Principiul Inductiei Matematice.

Principiul inductiei matematice constituie un mijloc important de demonstratie in matematica a propozitiilor (afirmatiilor) ce depind de argument natural.

Metoda inductiei matematice consta in urmatoarele:

O propozitie (afirmatie) oarecare *P*(*n*), ce depinde de un numar natural *n*, este adevarata pentru orice *n* natural, daca:

1. *P*(1) este o propozitie (afirmatie) adevarata;
2. *P*(*n*) ramane o propozitie (afirmatie) adevarata, cand *n* se majoreaza cu o unitate, adica *P*(*n* + 1) este adevarata.

Asadar, metoda inductiei presupune doua etape:

1. Etapa de verificare: se verifica daca propozitia *P*(1) este adevarata;
2. Etapa de demonstrare: se presupune ca propozitia *P*(*n*) este adevarata si se demonstreaza justetea afirmatiei *P*(*n* + 1) (*n* a fost majorat cu o unutate).

Nota 1. In unele cazuri metoda inductiei matematice se utilizeaza in urmatoarea forma:

Fie *m* un numar natural, *m* > 1 si *P*(*n*) o propozitie ce depinde de *n*, *n* ≥ *m*.

Daca

1. *P*(*m*) este adevarata;
2. *P*(*n*) fiind o propozitie justa implica *P*(*n* + 1) adevarata pentru *n* ≥ *m*, atunci *P*(*n*) este o propozitie adevarata pentru orice numar natural *n* ≥ *m*.

In continuare sa ilustram metoda inductiei matematice prin exemple.

Exemplul 1. Sa se demonstreze urmatoarele egalitati

$a)\ 1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2},$

$b)\ 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2,$

$c)\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

$d)\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2,$

$e)\ 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3},$

$f)\ \dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1},$

$g)$ formula binomului Newton:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^3a^{n-3}b^3+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n,\quad a,b\in\mathbf{R},$$

unde $n \in \mathbf{N}$.

Rezolvare. a) Pentru *n* = 1 egalitatea devine $1=\dfrac{1\cdot 2}{2}$, 1=1, prin urmare *P*(1) este adevarata. Presupunem ca egalitatea din enunt este adevarata, adica are loc egalitatea

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

si urmeaza sa verificam daca $P(n + 1)$, adica

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

este justa. Cum (se tine seama de egalitatea din enunt)

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

se obtine

$$1+2+3+\ldots+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

adica $P(n + 1)$ este afirmatie justa.

Asadar, conform principiului inductiei matematice egalitatea din enunt este justa pentru orice n natural.

Nota 2. Mentionam ca acest exemplu poate fi rezolvat si fara utilizarea inductiei matematice. Intr-adevar, suma $1 + 2 + 3 + ... + n$ reprezinta suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice cu primul termen $a_1 = 1$ si ratia $d = 1$. In baza formulei cunoscute $\left(S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\right)$ se obtine

$$S_n=\frac{1+n}{2}\cdot n.$$

b) Pentru $n = 1$ egalitatea devine $2\cdot 1 - 1 = 1^2$ sau 1=1, astfel $P(1)$ este justa. Presupunem justa egalitatea

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

si urmeaza sa verificam daca are loc $P(n + 1)$:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$

sau

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Se tine seama de egalitatea din enunt si se obtine

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Asadar $P(n + 1)$ este adevarata si, prin urmare, egalitatea din enunt este adevarata.

Nota 3. Similar exemplului precedent, se rezolva si fara a aplica metoda inductiei matematice.

c) Pentru $n = 1$ egalitatea este justa $1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, 1=1. Se presupune justa egalitatea

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

si se arata ca

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

adica $P(n)$ adevarata implica $P(n + 1)$ adevarata. In adevar

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right]=\frac{n+1}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]=\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6),$$

si cum $2n^2 + 7n + 6 = (2n + 3)(n + 2)$ se obtine

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

si, prin urmare, egalitatea este adevarata.

d) Pentru $n = 1$ egalitatea este justa: $1^3 = \left[\frac{1 \cdot 2}{2}\right]^2$, 1=1. Se presupune ca are loc egalitatea

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

si se arata ca are loc egalitatea

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

In adevar, tinand seama de ipoteza

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

e) Propozitia $P(1)$ este justa $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$, 2=2. Se presupune ca egalitatea

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

este adevarata si se arata ca ea implica egalitatea

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

In adevar

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) =$$

$$= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Asadar, egalitatea enuntata este justa pentru orice n natural.

f) $P(1)$ este adevarata: $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$, $^1/_3 = {}^1/_3$. Se presupune ca are loc $P(n)$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

si se arata ca aceasta egalitate implica egalitatea

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

In adevar, tinand seama de justetea afirmatiei $P(n)$, se obtine

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Prin urmare, egalitatea este demonstrata.

g) Pentru $n = 1$ egalitatea devine $a + b = b + a$, si deci este adevarata.

Fie formula binomului Newton este justa pentru $n = k$, adica

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + b^k.$$

Atunci

$$(a+b)^k = (a+b)^k(a+b) = (a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \ldots + b^k)(a+b) =$$

$$= a^{k+1} + (1 + C_k^1)a^k b + (C_k^1 + C_k^2)a^{k-1}b^2 + \ldots + (C_k^s + C_k^{s+1})a^{k-s}b^s + \ldots + b^{k+1}.$$

Tinand seama de egalitatea $C_k^s + C_k^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$, se obtine

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+2}^2 a^{k-1}b^2 + \ldots + C_{k+1}^{s+1}a^{k-s}b^{s+1} + \ldots + b^{k+1}.$$

Exemplul 2. Sa se demonstreze inegalitatile

a) inegalitatea Bernuolli: $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$, $\alpha > -1$, $n \in \mathbf{N}$.

b) $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$, daca $x_1x_2\cdot ... \cdot x_n = 1$ si $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

c) inegalitatea Cauchy relativa la media aritmetica si geometrica

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$ unde $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$.

d) $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leq 1$, $n \in \mathbf{N}$.

e) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}$, $n \in \mathbf{N}$.

f) $2^n > n^3$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 10$.

Rezolvare. a) Pentru $n = 1$ inegalitatea este adevarata

$$1 + \alpha \geq 1 + \alpha.$$

Se presupune ca are loc inegalitatea enuntata

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \qquad (1)$$

si se arata, ca in asa ipoteza are loc si

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha.$$

In adevar, cum $\alpha > -1$ implica $\alpha + 1 > 0$, multiplicand ambii membri ai inegalitatii (1) cu $(\alpha + 1)$ se obtine

$$(1 + \alpha)^n(1 + \alpha) \geq (1 + n\alpha)(1 + \alpha)$$

sau

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha^2$$

Cum $n\alpha^2 \geq 0$, rezulta

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n + 1)\alpha.$$

Asadar $P(n)$ adevarata implica $P(n + 1)$ adevarata, prin urmare, conform principiului inductiei matematice inegalitatea Bernoulli este adevarata.

b) Pentru $n = 1$, se obtine $x_1 = 1$, si, prin urmare $x_1 \geq 1$, adica $P(1)$ este o afirmatie justa. Se presupune ca $P(n)$ este adevarata, adica, $x_1,x_2,...,x_n$ sunt n numere pozitive, prodususul carora este egal cu unu, $x_1x_2\cdot...\cdot x_n = 1$, si $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.

Sa aratam, ca aceasta ipoteza implica justetea urmatoarei afirmatii: daca $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}$ sunt $(n + 1)$ numere pozitive cu $x_1x_2\cdot...\cdot x_n\cdot x_{n+1} = 1$ atunci $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} \geq n + 1$.

Se disting urmatoarele doua cazuri:

1) $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_{n+1} = 1$ si atunci suma lor este $(n + 1)$, inegalitatea fiind justa,

2) cel putin un numar este diferit de unu, fie mai mare ca unu. Atunci, dat fiind $x_1x_2\cdot ... \cdot x_n\cdot x_{n+1} = 1$, rezulta ca exista cel putin inca un numar diferit de unu, mai exact, mai mic ca unu. Fie $x_{n+1} > 1$ si $x_n < 1$. Consideram n numere pozitive

$$x_1,x_2,...,x_{n-1},(x_n\cdot x_{n+1}).$$

Produsul lor este egal cu unu, iar conform ipotezei

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_nx_{n+1} \geq n.$$

Ultima inegalitate se scrie astfel

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1}$$

sau

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1}.$$

Cum

$$n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} = n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) - 1 + x_n =$$
$$= n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) - (1 - x_n) = n + 1 + (1 - x_n)(x_{n+1} - 1) \geq n + 1$$

deoarece

$$(1 - x_n)(x_{n+1} - 1) > 0,$$

rezulta

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} \geq n+1,$$

adica $P(n)$ adevarata implica $P(n + 1)$ adevarata. Inegalitatea este demonstrata.

Nota 4. Se observa, ca semnul egalitatii are loc daca si numai daca $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

c) Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ numere pozitive arbitrare. Se considera n numere

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}},\ \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}},\ \ldots\ ,\ \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}.$$

Cum aceste numere sunt pozitive si produsul lor este egal cu unu

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \cdot \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} = \frac{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = 1$$

conform inegalitatii b) demonstrate anterior rezulta

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \geq n,$$

de unde rezulta

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Nota 5. Semnul egalitatii are loc daca si numai daca $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

d) $P(1)$ este o afirmatie justa: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Se presupune ca $P(n)$ este o afirmatie adevarata:

$$\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leq 1$$

si se arata ca $P(n + 1)$ are loc. In adevar

$$\sin^{2(n+1)}\alpha + \cos^{2(n+1)}\alpha = \sin^{2n}\alpha \cdot \sin^2\alpha + \cos^{2n}\alpha \cdot \cos^2\alpha < \sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leq 1$$

(se tine seama ca daca $\sin^2\alpha \leq 1$ atunci $\cos^2\alpha < 1$ si reciproc daca $\cos^2\alpha \leq 1$ atunci $\sin^2\alpha < 1$). Asadar, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n} \leq 1$ si semnul egalitatii se atinge doar pentru $n = 1$.

e) Pentru $n = 1$ afirmatia este justa: $\frac{1}{1!} < \frac{5-2}{2 \cdot 1}$, $1 < {}^3/_2$.

Se presupune ca $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}$, si urmeaza de a demonstra ca

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)}.$$

Cum

$$(n+1)! > n(n+1) \;\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n(n+1)} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{2}{2n(n+1)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{(5n+3)\cdot n - (5n-2)(n+1)}{2(n+1)n} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)} - \frac{5n-2}{2n} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)},$$

se tine seama de $P(n)$ si se obtine

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} < \frac{5n+3}{2(n+1)}.$$

f) Se tine seama de nota 1 si se verifica $P(10)$: $2^{10} > 10^3$, $1024 > 1000$, asadar pentru $n = 10$ inegalitatea este justa. Se presupune ca $2^n > n^3$ $(n > 10)$ si trebuie de demonstrat $P(n+1)$, adica $2^{n+1} > (n+1)^3$.

Cum pentru $n > 10$ avem $2 > \left(\frac{1}{n}\right)^3$ sau $2 > 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ rezulta

$$2n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad \text{sau} \quad n^3 > 3n^2 + 3n + 1.$$

Se tine seama de ipoteza ($2^n > n^3$) si se obtine

$$2^{n+1} = 2^n\cdot 2 = 2^n + 2^n > n^3 + n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$$

Asadar conform principiului inductiei pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 10$ avem $2^n > n^3$.

Exemplul 3. Sa se demonstreze ca pentru orice $n \in \mathbf{N}$

a) $n(2n^2 - 3n + 1)$ se divide cu 6,

b) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ se divide cu 11.

Rezolvare. a) $P(1)$ este o propozitie adevarata (0 se divide cu 6). Fie $P(n)$ are loc, adica $n(2n^2 - 3n + 1) = n(n - 1)(2n - 1)$ se divide cu 6. Se arata, ca are loc $P(n + 1)$ adica $(n + 1)n(2n + 1)$ se divide cu 6. In adevar, cum

$$n(n+1)(2n+1) = n(n-1+2)(2n-1+2) = (n(n-1) + 2n)(2n-1+2) =$$
$$= n(n-1)(2n-1) + 2n(n-1) + 2n(2n+1) = n(n-1)(2n-1) + 2n\cdot 3n =$$
$$= n(n-1)(2n-1) + 6n^2$$

si cum atat $n(n - 1)(2n - 1)$ cat si $6n^2$ se divid cu 6, rezulta ca si suma lor, adica $n(n + 1)(2n + 1)$ se divide cu 6.

Asadar $P(n + 1)$ este o afirmatie justa, si $n(2n^2 - 3n + 1)$ se divide cu 6 pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

b) Se verifica $P(1)$: $6^0 + 3^2 + 3^0 = 11$, prin urmare $P(1)$ este justa. Urmeaza sa se arate, ca daca $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ se divide cu 11 ($P(n)$), atunci $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ de asemenea se divide cu 11 ($P(n + 1)$). In adevar, cum

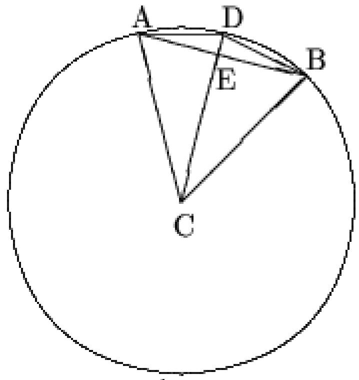
$$6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 6^{2n-2+2} + 3^{n+1+1} + 3^{n-1+1} =$$
$$= 6^2\cdot 6^{2n-2} + 3\cdot 3^{n+1} + 3\cdot 3^{n-1} = 3\cdot(6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) + 33\cdot 6^{2n-2}$$

si atat $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$, cat si $33\cdot 6^{2n-2}$ se divid cu 11, rezulta ca si suma lor, adica $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ se divide cu 11.

Inductia in geometrie.

Exemplul 1. Sa se calculeze latura a_{2^n} a unui poligon regulat cu 2^n laturi inscris intr-o circumferinta de raza R.

Rezolvare. Pentru $n = 2$ poligonul regulat cu 2^2 laturi reprezinta un patrat, si in acest caz $a_4 = R\sqrt{2}$.



Fie $a_{2^n} = a'$si sa determinam $a_{2^{n+1}} = a''$. Daca $AB = a'$, atunci $AE = {}^{a'}/_{2}$; $BD = a''$. Din triunghiul DEB, conform teoremei Pitagora

$$a'' = \sqrt{\left(\frac{a'}{2}\right)^2 + DE^2}.$$

La randul sau $DE = R\text{-}EC$ si

$$EC^2 = BC^2 - BE^2 = R^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2.$$

Asadar $DE = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2},$ si deci,

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{\left(\frac{a'}{2}\right)^2 + R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{a'}{4}\right)^2}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}}.$$

Astfel s-a obtinut o formula de trecere de la n la $n + 1$. In cazuri particulare:

$$a_4 = R\sqrt{2} \;\Rightarrow\; a_8 = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{R^2 \cdot 2}{4}}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$a_{16} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2(2 - \sqrt{2})}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Natural apare ipoteza

$$a_{2^n} = R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ ori}}}. \qquad (2)$$

Cum a fost arata anterior, pentru $n = 1$ aceasta formula este adevarata.

Fie (2) adevarata pentru $n = k$. Sa calculam $a_{2^{n+1}}$. Conform formulei de trecere se obtine

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - R^2\frac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{n-2 \text{ ori}}}{4}}} = R\!-\!\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ ori}}}.$$

Nota. Din (2) rezulta ca lungimea circumferintei este egala cu

$$l=\lim_{n\to\infty}2^nR\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2\ \text{ori}}},$$

si cum $l = 2\pi R$, se obtine

$$\pi=\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\ \text{ori}}}.$$

Exercitii pentru autoevaluare

I. Sa se demonstreze egalitatile:

$a)\ 1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3},$

$b)\ 1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12},\quad n>1,$

$c)\ \sin x+\sin(x+\alpha)+\ldots+\sin(x+n\alpha)=\dfrac{\sin(x+\frac{n\alpha}{2})\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$

$d)\ \dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)},$

$e)\ \dfrac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{5}{\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{6}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{2n+5}{2(n+1)(n+2)},$

$f)\ 2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=\dfrac{n(2n^2+9n+1)}{6},$

$g)\ \cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cos 2^n\alpha=\dfrac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha},$

$h)\ \sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\sin\dfrac{nx}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$

$i)\ \dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$

$j)\ \sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\ldots+n\sin nx=\dfrac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}},$

$k)\ \cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx=\dfrac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}},$

$l)\ \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x\quad(x\neq m\pi)$

$m)\ \operatorname{arcctg}3+\operatorname{arcctg}5+\ldots+\operatorname{arcctg}(2n+1)=\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}+\ldots+\operatorname{arctg}\dfrac{n+1}{n}-n\operatorname{arctg}1$

II. Sa se demonstreze inegalitatile

$a)\ 2^n > 2n+1 \quad (n \geq 3),$

$b)\ \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$

$c)\ |a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|,$

$d)\ 2!4!\ldots(2n)! > [(n+1)!]^n, \quad n \geq 2,$

$e)\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n > 1,$

$f)\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbf{N}; \quad \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$

$g)\ \frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$

III. Sa se demonstreze, ca pentru orice numar natural, numarul a_n se divide cu b

a) $a_n = 5^{n+3} + 11^{3n+1}, \quad b = 17,$
b) $a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}, \quad b = 133,$
c) $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n, \quad b = 6,$
d) $a_n = 10^n + 18n - 28, \quad b = 27,$
e) $a_n = n^5 - n, \quad b = 30.$

IV. Sa se arate, ca $\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\ldots} \longrightarrow \pi$ (Formula lui Viete).

V. Sa se calculeze razele r_n, R_n a circumferintelor inscrise si circumscrise poligonului regulat cu 2^n laturi de perimetru p.

VI. Sa se determine in cate triughiuri poate fi divizat un poligon cu n laturi de diagonalele sale neconcurente.

VII. Fie date n patrate arbitrare. Sa se arate ca aceste patrate pot fi taiate in asa mod incat din partile obtinute se poate de format un patrat.