FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

1. PATRATUL SUMEI A DOI TERMENI (BINOMUL LA PATRAT)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Demonstratie

$(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$



$(a-b)(a-b) = aa - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Aplicatii.

1. ***Sa se demonstreze ca*** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ***este un numar irational***.

Presupunem prin reducere la absurd ca $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \in Q$

$\Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \in Q \Rightarrow 2+2\sqrt{6}+3 \in Q \Rightarrow 5+2\sqrt{6} \in Q \Rightarrow 2\sqrt{6} \in Q \Rightarrow \sqrt{6} \in Q$

Am ajuns la absurd, deci numarul este irational.

2. ***Sa se compare numerele x=*** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ***si y=*** $\sqrt{7}+1$

Deoarece x si y sunt pozitive, putem sa comparam patratele lor:

$x^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = 3+2\sqrt{15}+5 = 8+2\sqrt{15}$

$y^2 = (\sqrt{7}+1)^2 = 7+2\sqrt{7}+1 = 8+2\sqrt{7}$

Deoarece $x^2 \succ y^2 \Rightarrow x \succ y$

2. PATRATUL SUMEI A TREI TERMENI (TRINOMUL LA PATRAT)

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

Demonstratia se face la fel ca si la binomul la patrat.

3. PRODUSUL SUMEI CU DIFERENTA

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Aplicatie.

Sa se demonstreze ca daca $x, y \geq 0$ *atunci* $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$

$x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow x - y \leq 0 \Rightarrow x \leq y$

4. CUBUL SUMEI A DOI TERMENI

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Formula se mai poate scrie si astfel:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

La fel se poate scrie:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Demonstratia se face ca la formula precedenta

5. DIFERENTA A DOUA CUBURI

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

6. SUMA A DOUA CUBURI

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exercitii

1. ***Sa se demonstreze ca*** $x^2 + 6x + y^2 + 10y + 34 \geq 0$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = (x+3)^2 + (y+5)^2$ *Avand o suma de 2 numere pozitive expresia este mai mare decat 0.*

2. ***Sa se afle minimul expresiei*** ($2x^2 + 10x + 8$)

$$2x^2 + 10x + 8 = 2(x^2 + 5x + 4) = 2\left[(x^2 + 5x + \frac{25}{4}) - \frac{25}{4} + 4\right] = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$$

Minimul expresiei se obtine cand $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ *este minima, adica 0.*

Rezulta ca minimul este - $\frac{9}{2}$

3.Sa se afle maximul expresiei: - $x^2 + 32x + 1$

$-x^2 + 32x - 256 + 257 = -(x^2 - 32x + 256) + 257 = -(x-16)^2 + 257$ *Maximul se obtine pentru minimul expresiei cu semnul -, adica pentru* $(x-16)^2 = 0$. *Deci maximul este 257*

3. ***Sa se determine numerele reale x, y pentru care***

$3x^2 - 2\sqrt{3}x + y^2 + 6y + 10 = 0$

$(3x^2-2\sqrt{3}x+1)+(y^2+6y+9)=0\Rightarrow\left(\sqrt{3}x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=0\Rightarrow\left(\sqrt{3}x-1\right)=0;(y+3)=0$

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ *si* $y=-3$

4. Sa se arate ca numarul $\overline{a2}\cdot\overline{a4}+1$ ***este un patrat perfect.***

$\overline{a2}\cdot\overline{a4}+1=(10a+2)(10a+4)+1=100a^2+60a+9=\left(10a+3\right)^2$

5. Sa se arate ca numarul $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ ***este un patrat perfect.***

$x(x+3)(x+1)(x+2)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$ *Notam* x^2+3x *cu* $k\Rightarrow k(k+2)+1=k^2+2k+1=\left(k+1\right)^2=\left(x^2+3x+1\right)^2$ *ceea ce trebuia sa demonstram.*

7.Daca $x+\frac{1}{x}=5$ ***sa se calculeze:***

i) $x^2+\frac{1}{x^2}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5^2\Rightarrow x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=25\Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=2$

$x^2+\frac{1}{x^2}=25-2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=23$

ii) $x^3+\frac{1}{x^3}$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3\left(x+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} \Rightarrow$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 125 - 3\cdot 5 = 125 - 15 = 110$$

8.Daca $x^2 - 3x + 4 = 10$ ***sa se calculeze expresia:***

$$x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 24$$

$$\left(x^2 - 3x + 4\right)^2 = x^4 + 9x^2 + 16 - 6x^3 + 8x^2 - 24x =$$
$$= x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 16 \Rightarrow$$
$$x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 24 = \left(x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 16\right) + 8 =$$
$$= \left(x^2 - 3x + 4\right)^2 + 8 = 10^2 + 8 = 108$$

9. Sa se calculeze $12^3 - 8^3$

$$12^3 - 8^3 = (12-8)\left(12^2 + 12\cdot 8 + 8^2\right) = 4\cdot(144 + 96 + 64) = 4\cdot 304 = 1216$$