CUPRINS

NOTIUNI TEORETICE*................................ *2
Derivata unei functii într-un punct 2
Operatii cu functii derivabile. Derivatele unor functii uzuale ***5***
Proprietatile functiilor derivabile ***10***

APLICATII ***18***

Notiuni teoretice

I. Derivata unei funcţii într-un punct

I.0^o Originea noţiunii de derivată

Au existat două probleme, una fizică - modelarea matematică a noţiunii intuitive de viteză a unui mobil - şi alta geometrică - tangenta la o curbă plană -, care au condus la descoperirea noţiunii de derivată. Am folosit de mai multe ori referiri la viteza unui mobil, dar abia acum vom putea da definiţia matematică a acestui concept.

I.1^o Definiţia derivatei unei funcţii într-un punct

Fie o funcţie $f : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{E} \subset \mathbf{R}$) şi $x_0 \in E$, x_0 punct de acumulare al mulţimii **E**. Reţinem că f este definită in x_0.

DEFINITIA 1:

1**)** *Se spune că f **are derivată în punctul x_0**, dacă există (în $\overline{R}$)*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ *, notată cu $f'(x_0)$;*

*2) Dacă derivata $f'(x_0)$ există şi este finită se spune că funcţia f **este derivabilă în x_0**.*

Observaţii. *1. Se poate întâmpla ca f '(x_0) să existe şi să fie* $+\infty$ *sau* $-\infty$.

2.Trebuie remarcat că problema existenţei derivatei sau a derivabilităţii nu se pune în punctele izolate ale mulţimii ***E*** *(dacă* ***E*** *are astfel de puncte!).*

Presupunem că *f '(x_0)* există; făcând translaţia $x - x_0 = h$, atunci din relaţia de definiţie rezultă că

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x_0 + h \in E}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

DEFINITIA 2:

Dacă o funcţie f: ***E*** $\to$ ***R*** *este derivabilă în orice punct al unei submulţimi* ***F*** $\subset$ ***E****, atunci se spune că f* ***este derivabilă pe mulţimea F.*** *In acest caz, funcţia* ***F*** $\to$ ***R****, x* $\to$ *f '(x) se numeşte* ***derivata lui f pe mulţimea F*** *şi se notează cu f '. Operaţia prin care f ' se obţine din f se numeşte* ***derivarea*** *lui f.*

TEOREMA 1. **Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.**

Demonstraţia este simplă*:* Presupunem că *f*: ***E*** $\to$ ***R*** este derivabilă în punctul $x_0 \in$ ***E***, deci limita din definiţia 1 există şi este finită.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0);\ x \neq x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_{0)} \right) = \lim_{n \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ este continua in } x_0.$$

În general reciproca teoremei este falsă. Un exemplu este funcţia modul în origine.

În studiul existenţei limitei unei funcţii într-un punct un criteriu util l-a constituit egalitatea limitelor laterale. Adaptăm acest criteriu la studiul derivabilităţii unei funcţii într-un punct, ţinând cont că existenţa derivatei implică în fond existenţa unei anumite limite.

DEFINITIA 3.

Fie ***E*** $\subset$ ***R*** *şi* $x_0 \in$ ***E*** *un punct de acumulare pentru* ***E*** $\cap (-\infty, x_0)$. *Dacă limita*

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

există (în ***R*** *barat), atunci această limită se numeşte* ***derivata la stânga*** *a funcţiei f în punctul* x_0*.Dacă , în plus, această limită există şi este finită, atunci se spune că f este* ***derivabilă la stânga*** *în punctul* x_0*.*

În mod similar se definesc ***derivata*** $f_d'(x_0)$ ***la dreapta*** *şi noţiunea de funcţie derivabilă la dreapta în* x_0*.*

TEOREMA 2. **Dacă *f*: *E* → *R* este derivabilă în punctul $x_0 \in E$, atunci *f* este derivabilă la stânga şi la dreapta în x_0 şi** $f_d'(x_0) = f'(x_0) = f_s'(x_0)$.

Reciproc, dacă *f* este derivabilă la stânga şi la dreapta în x_0 şi dacă $f_d'(x_0) = f_s'(x_0)$**, atunci *f* este derivabilă în x_0 şi** $f'(x_0) = f_s'(x_0)$.

Dacă *E=[a, b]*, faptul că *f* este derivabilă în *a* (respectiv *b*) revine la aceea că *f* este derivabilă la dreapta în punctul *a* (respectiv la stânga în *b*).

Exemplu : Pentru f : **R→R,** $f(x) = |x|$, avem

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|}{x} = -1$$

Similar se obţine că:

$$f_d'(0) = 1,$$

regăsim că f nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

I.2° Interpretarea geometrică a derivatei

Dacă $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ este o funcţie derivabilă într-un punct $x_0 \in (a, b)$, atunci conform relaţiilor

$$m = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

graficul lui f are tangentă în x_0 (sau mai corect în punctul $(x_0, f(x_0))$, anume dreapta de ecuaţie

$$y - f(x_0) = m(x - x_0), \text{ unde } m = f'(x_0).$$

Aşadar $f'(x_0)$ este coeficientul unghiular al tangentei la graficul lui f, în punctul $(x_0, f(x_0))$. Dacă $f'(x_0) = +\infty$ sau $-\infty$ (în sensul că limita din definiţie este infinită), atunci tangenta în $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Oy.

Fără nici o dificultate , se poate vorbi de semitangentă la dreapta sau la stânga într-un punct la un grafic, în legătură cu derivatele laterale respective în acel punct. Geometric, pentru o funcţie derivabilă într-un punct, direcţiile semitangentelor la dreapta şi stânga la grafic în acel punct coincid.

Dacă într-un punct x_0, f este continuă şi avem $f_d'(x_0) = +\infty$ si $f_s'(x_0) = -\infty$ (sau invers), atunci punctul x_0 se numeşte punct de întoarcere al graficului lui f.

Dacă o funcţie f: **E** → **R** (**E** ⊂ **R**) este continuă într-un punct $x_0 \in$ **E**, dacă există ambele derivate laterale, cel puţin una dintre ele fiind finită, dar funcţia nu este derivabilă în x_0, atunci se spune că x_0 este punct unghiular al graficului lui f (fig.2.). Intr-un punct unghiular cele două semitangente, la stânga şi la dreapta, formează un unghi $\alpha \in (0, \pi)$.

Exemple :

Pentru funcţia $f(x) = \sqrt{x}$, scriem ecuaţia tangentei în punctul $x_0 = 1$.

Avem $f(1)=\sqrt{1}=1$ si $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ şi ecuaţia cerută este

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(x+1) \text{ (fig. 3).}$$

II. Operaţii cu funcţii derivabile. Derivatele unor funcţii uzuale

Am întâlnit deja exemple de funcţii derivabile. Este utilă o sinteză a derivatelor funcţiilor uzuale şi se impune stabilirea unor reguli generale de derivare a sumelor, produselor, compunerilor etc. de funcţii derivabile.

II.1° Derivatele câtorva funcţii uzuale

a) Orice funcţie constantă $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)=c$ este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$, cu derivata nulă

$$c'=0 \qquad (1).$$

b) Funcţia putere $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^n$ (n real şi $x > 0$) este derivabilă pe $\boldsymbol{R}$ şi $f'(x)=nx^{n-1}$.

$$(x^n)'=nx^{n-1}, \forall x\in \mathbf{R} \qquad (2).$$

c) Funcţia logaritmică $f: (0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \ln x$ este derivabilă pe domeniul de definiţie şi are derivata

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}, \forall x\in \mathbf{R}_+ \qquad (3).$$

d) Funcţiile trigonometrice $f, g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x)=\cos x$ sunt derivabile pe $\boldsymbol{R}$ şi pentru orice $x\in \mathbf{R}$ avem

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x\\ (\cos x)' &= -\sin x\end{aligned} \qquad (4).$$

Demonstraţiile tuturor acestor derivate se fac uşor folosind definiţia derivatei.

II.2° Reguli de derivare

In continuare arătăm că pentru funcţii ca f, g : $\boldsymbol{E}\rightarrow\boldsymbol{R}$ derivabile, $\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{R}$, funcţiile f + g, f-g, fg etc. au aceeaşi proprietate.

***TEOREMA 3*. Presupunem că *f*, *g* sunt derivabile în punctul $x_0\in$ E şi λ o constantă. Atunci :**

(a) suma *f* + *g* este derivabilă în x_0 şi

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g(x_0)$$

(b) λf este derivabilă în x_0 şi

$$(\lambda\cdot f)'(x_0)=\lambda f'(x_0)$$

(c) produsul *fg* este o funcţie, derivabilă în x_0 şi

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Demonstraţia se face de asemenea uşor folosind definitia derivatei.
Generalizând se obţine următorul

***COROLAR*. Dacă f_1, f_2,…f_k sunt funcţii derivabile în punctul x_0, atnuci suma $f_1+f_2+\ldots+f_k$, respectiv produsul $f_1f_2\ldots f_k$ sunt derivabile în x_0 şi, în plus:**

$$\left(f_1+f_2+...+f_k\right)'=f_1^{k}(x)+f_2^{'}(x)+...+f_k^{'}(x) \text{ şi}$$

$$\left(f_k\,f_k\ldots f_k\right)'(x_0)=f_1^{'}(x_0)f_2(x_0)\ldots f_k(x_0)+f_1(x_0)f_2^{'}(x_0)\ldots f_k(x_0)+\ldots+$$
$$+f_1(x_0)f_2(x_0)\ldots f_{k-1}(x_0)f_k^{'}(x_0).$$

***TEOREMA 4*. Presupunem că *f* şi *g* sunt derivabile în x_0 şi că $g(x_0)\neq 0.$. Atunci funcţia – cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 şi, în plus :**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

II.3° Derivarea unei funcţii compuse şi a inversei unei funcţii

Trecem acum la stabilirea altor două teorema generale de derivare, relativ la compunere şi inversare. Deosebit de importantă este formula de derivare a funcţiilor compuse. In acest sens, are loc

***TEOREMA 5.* Fie *I, J* intervale şi $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} R$ două funcţii. Dacă *f* este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, şi g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$, atunci funcţia compusă $G = g \circ f$ este derivabilă în x_0 şi $G'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$. Dacă *f* este derivabilă pe *I*, *g* este derivabilă pe *J*, atunci $g \circ f$ este derivabilă pe *I* şi are loc formula :**

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

Demonstraţie. Avem de arătat că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Considerăm funcţia ajutătoare $F: I \to R$, definită prin

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, \ daca \ y \neq y_0 \\ \\ g'(y_0), daca \ y = y_0. \end{cases}$$

Funcţia *F* este continua în punctul y_0 deoarece

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) = F(y_0)$$

Pe de altă parte, pentru orice $x \neq x_0$ avem

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = F(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Intr-adevăr dacă $f(x) = f(x_0)$, atunci ambii termeni sunt nuli, iar dacă $f(x) \neq f(x_0)$, atunci $f(x) \neq y_0$ şi, conform funcţiei ajutătoare , deci relaţia precedentă este dovedita în ambele cazuri. Observând că $F(f(x)) \to F(f(x_0) = F(y_0) = g'(y_0)$ şi trecând la limită ($x \to x_0$) relaţia precedentă rezultă că

$$G'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

***TEOREMA 6.* Fie *f: I →J* o funcţie continuă şi bijectivă între două intervale. Presupunem că *f* este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci inversa $g=f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0=f(x_0)$ şi, în plus,**

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstraţie. Mai întâi trebuie să punem condiţia pentru că limita $\lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$; $y \neq y_0$. Din faptul că $y \neq y_0$ rezultă că $x \neq x_0$ şi, în plus,

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{g(f(x)-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

Trecând la limită când $y \to y_0$, rezultă că $g(y) \to g(y0)$ adică $x \to x_0$ şi ultimul raport tinde către $\frac{1}{f'(x_0)}$. Primul raport din relaţia de mai sus va avea limită, deci funcţia g este derivabilă în punctul y_0. Ceea ce trebuia de demonstrat.

Această teoremă se foloseşte la aflarea derivatelor unor inverse de funcţii. Cum ar fii *arcsin x, arccos x, arctg x, arcctg x.*

II.4° Derivatele funcţiilor uzuale şi a regulilor de derivare

I. *Reguli de derivare*

1. $(f \pm g)' = f' \pm g', (\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$;
2. $(fg)' = f'g + g'f$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$;
4. $(g(f))' = g'(f) \cdot f'; (f)^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1})}$;

*II. **Tabloul de derivare al funcţiilor elementare***

Funcţia	**Derivata**	**Domeniul de derivabilitate**
c(constantă)	0	***R***
x	1	***R***
x^n	nx^{n-1}	***R***
x^r, *r real*	rx^{r-1}	cel puţin $(\mathbf{0},+\infty)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\mathbf{0},+\infty)$

ln x	$\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
e^x	e^x	**R**
a^x	$a^x \ln a$	**R**
sin x	*cos x*	**R**
cos x	*-sin x*	**R**
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	*cos x* $\neq 0$
ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	*sin x* $\neq 0$
arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	*(-1, 1)*
arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	*(-1, 1)*
arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$	**R**
arcctg x	$-\frac{1}{1+x^2}$	**R**

Toate aceste derivate se demonstrează uşor folosind definiţia derivatei şi teorema 6. Teorema de derivare a funcţiilor compuse împreună cu tabloul anterior permite obţinerea următoarelor formule utilizate (unde $u = u(x)$ este o funcţie derivabilă).

Tabloul de derivare al funcţiilor compuse

Funcţia	***Derivata***	***Domeniul de definiţie***
u	*u'*	
u^n	$nu^{n-1}u'$	
u^r	$ru^{r-1}u'$	*u>0*
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	*u>0*
ln u	$\frac{u'}{u}$	*u>0*
e^u	$e^u u'$	
a^u	$a^u(\ln a)\, u'$	
sin u	*u'cos u*	
cos u	*-u'sin u*	
tg u	$\frac{u'}{\cos^2 u}$	*cos u* $\neq 0$

ctg u	$-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	*sin* $u \neq 0$
arcsin u	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$u^2<1$
arccos u	$-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$u^2<1$
arctg u	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	
arcctg u	$-\dfrac{u'}{1+u^2}$	

Adăugăm că dacă *u, v* sunt funcţii derivabile şi $u > 0$, atunci funcţia $u^v = e^{v\ln u}$ are derivata

$$\left(u^v\right)' = e^{v\ln u}\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right),$$

formulă care rezultă aplicând teorema de derivare a funcţiilor compuse funcţiei $e^{v\ln u}$ şi ţinând cont că $(v\ln u)' = v'\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}$.

III. Proprietăţile funcţiilor derivabile

In continuare vom da metode de determinare a punctelor de maxim şi minim, a intervalelor de monotonie, a intervalelor de convexitate etc. ale unei funcţii, în care rolul derivatelor este esenţial.

Unele din teoremele care urmează sunt intuitiv evidente (folosind de regulă interpretare geometrică a derivatei) şi demonstraţiile pot fi la început omise, insistând pe înţelegerea enunţurilor.

III.1^{o} Puncte de extrem. Teorema lui Fermat

Intr-o serie de probleme tehnice sau economice, şi bineînţeles matematice, este important de ştiut care sunt maximele şi minimele anumitor mărimi variabile. După ce problemele capătă o formulare matematică, adeseori ele se reduc la determinarea punctelor de extrem ale anumitor funcţii. Sunt necesare în prealabil câteva definiţii precise.

DEFINITIA 4:

Fixăm o funcţie $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}$ $(\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{R})$. Un punct $x_0 \in \boldsymbol{A}$ se numeşte **punct de maxim relativ** (respectiv **de minim relativ**) al lui f dacă există o vecinătate $\boldsymbol{U}$ a punctului x_0 astfel încât pentru orice $x \in \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{A}$ să avem

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ (respectiv } f(x) \geq f(x_0)\text{)}.$$

In acest caz valoarea $f(x_0)$ se numeşte un *maxim* (respectiv un *minim*) relativ al lui f.

Punctele de maxim sau de minim relativ se mai numesc puncte de extrem relativ. Dacă inegalităţile din definiţie sunt stricte se spune că x_0 este un punct de extrem strict. Valorile funcţiei în punctele ei de extrem relativ se mai numesc *extremele* relative ale funcţiei.

Observaţii.

1) Funcţia considerată trebuie să fie neapărat cu valori reale.

2) Trebuie ţinut cont de faptul că o funcţie poate să aibă mai multe puncte de maxim şi de minim relativ, iar un minim să fie mai mare decât un maxim, ceea ce justifică faptul că punctele de maxim şi de minim sunt „relative” (fig. 3, c).Valorile $\sup\limits_{x\in A} f(x), \inf\limits_{x\in A} f(x)$ calculate $\bar{\boldsymbol{R}}$ se mai numesc extremele globale ale lui f pe **A**..

Punctele de extrem relativ se mai numesc puncte de extrem *local*, deoarece inegalităţile de tipul celor din definiţie sunt verifica te nu neapărat pe întreg domeniul de definiţie al funcţiei f ci numai un jurul lui x_0.

3) Dacă marginea $M=\sup\limits_{x\in A} f(x)$ este atinsă pe mulţimea ***A***, atunci orice punct x astfel încât $f(x_0)=\boldsymbol{M}$ va fi un punct de maxim (nu neapărat strict). O situaţie analoagă (cu sensul inegalităţii schimbat) are loc pentru marginea inferioară şi pentru punctele de minim.

Dacă marginea superioară nu este atinsă pe mulţimea ***A***, atunci se poate spune că funcţia nu are puncte de maxim (fig. 4).

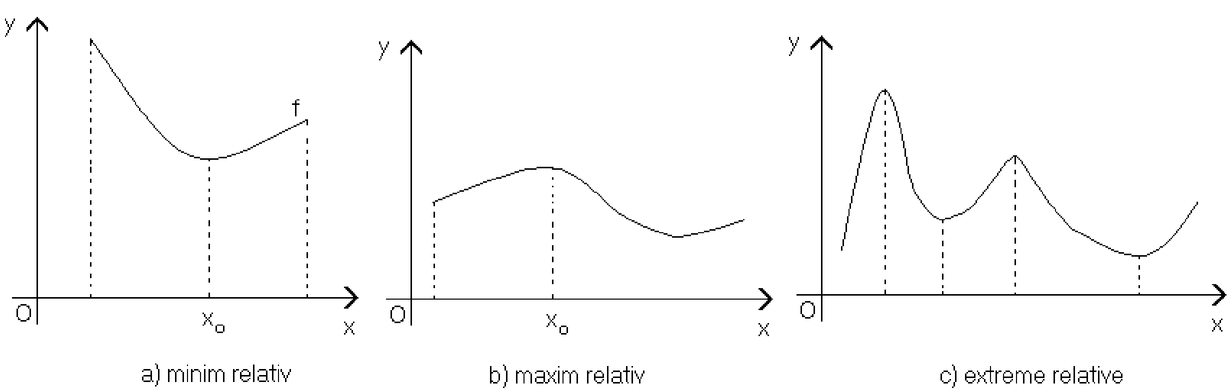


Fig. 3

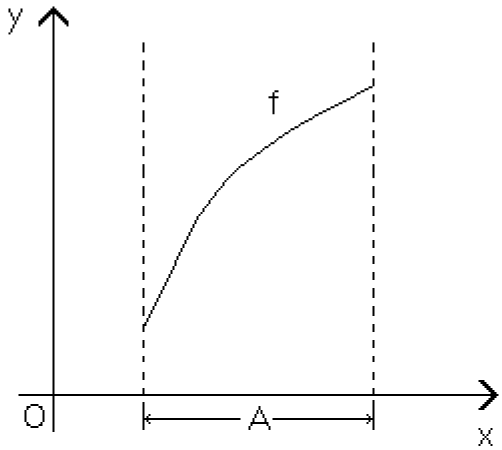


Fig. 4

Teorema 7. *(teorema lui P. Fermat, 1601- 1665).* **Fie I un interval deschis şi $x_0 \in$ I un punct de extrem (relativ) al unei funcţii f: I$\to$R. Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0)=0$.**

Demonstraţie. Presupunem că x_0 este un punct de maxim (cazul minimului se tratează la fel sau se reduce la cazul precedent considerând funcţia $-f$). Atunci există o vecinătate U a lui x_0 (şi putem presupune că $U \subset I$) astfel încât

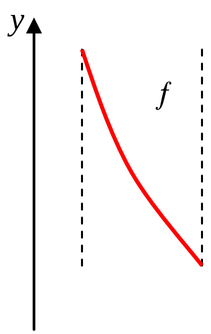
$$f(x) \le f(x_0) \text{ pentru orice } x \in U.$$

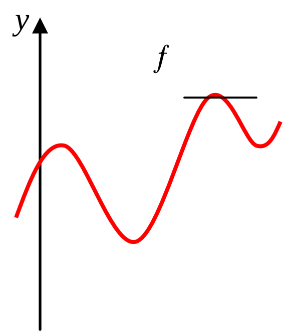
Cum f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0)= \; f_d'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ şi $f'(x_0)=$

$= f_s'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Conform ultimei inegalităţi de pe pagina alăturată raportul $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ este ≤ 0 (respectiv ≥ 0) pentru $x \in U$, $x > x_0$ (respectiv pentru $x \in U$, $x < x_0$), deci $f'(x_0) \le 0$, $f'(x_0) \ge 0$, de unde $f'(x_0) = 0$.

Observaţii. 1) Dacă nu ar fi fost interval deschis, de exemplu $\boldsymbol{I}=[a, b]$ şi $x_0=a$ (sau $x_0=b$), atunci teorema nu ar fi fost adevărată pentru că $f(x)$ nu ar fi fost definită pentru $x< a$, respectiv pentru $x > b$ (fig. 5 a).

2) Reciproca teoremei lui Fermat este în general falsă: din faptul că f este derivabilă într-un punct x_0 şi $f'(x_0)=0$ nu rezultă că x_0 este punct de extrem. De exemplu, pentru funcţia $f(x)=x^3$ avem $f'(0)=0$, dar punctul $x_0=0$ nu este punct de extrem local pentru că f este strict crescătoare (fig. 5 b). Se mai spune că teorema lui Fermat dă condiţii necesare de extrem, dar nu şi suficiente.





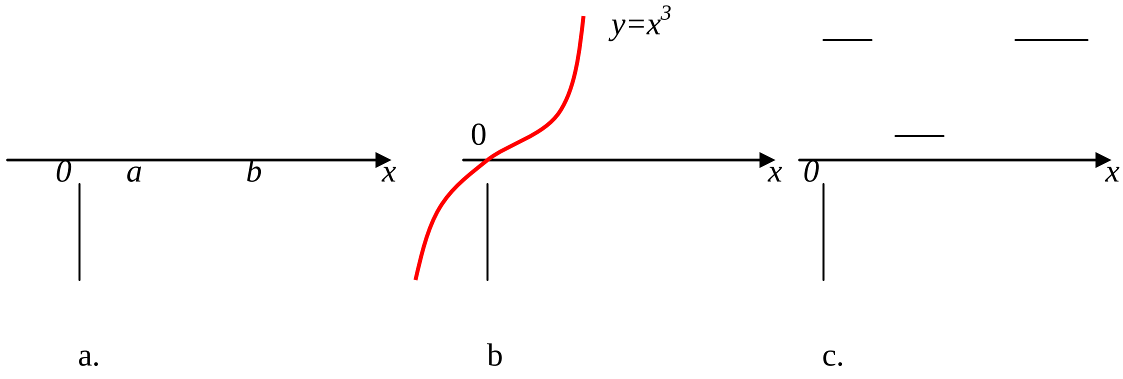


Fig 5.

Teorema lui Fermat are o interpretare geometrică evidentă : în condiţiile enunţului, într-un punct de extrem, tangenta la grafic este paralelă cu axa *Ox* (fig. 5 c).

Dacă f: $\boldsymbol{I}\rightarrow\boldsymbol{R}$ este o funcţie derivabilă pe un interval deschis ***I***, atunci zerourile derivatei f' pe ***I*** sunt numite şi *puncte critice* ale lui f pe ***I***; teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local sunt printre punctele critice. In practică, pentru determinarea punctelor de extrem ale unei funcţii f derivabile pe un interval deschis sau pe o reuniune de intervale deschise, se rezolvă mai întâi ecuaţia ***f(x)=0***. Vom vedea mai târziu cum putem decide care din soluţiile acestei ecuaţii sunt puncte de extrem pentru f.

4.2 Teorema lui Rolle

O funcţie f: *[a, b]* $\rightarrow$*R (a< b)* se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul compact [a, b] şi derivabilă pe intervalul deschis *(a, b).*

Teorema care urmează este o consecinţă a rezultatelor privind funcţiile şi a teoremei lui Fermat, foarte utilă în aplicaţii.

Teorema 8. *(teorema lui M. Rolle, 1652- 1719).* **Fie *f: [a, b]→ R a< b* o funcţie Rolle astfel încât *f(a)= f(b)*, atunci există cel puţin un punct $c\in$ *(a, b)* astfel încât *f'(c)=0.***

Demonstraţie. Funcţia f fiind continuă (conform teoremei lui Weierstrass) este mărginită şi îşi atinge marginile în *[a, b]*. Fie $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Apar trei cazuri :

I. $M> f(a)$. Există un punct $c\in [a, b]$ astfel încât $M=f(c)$ (*M* fiind atinsă) şi, evident, $c\neq a$, $a\neq b$ (dacă $c= a$ sau b, atunci $M= f(c)$ ar fi egal cu $f(a)= f(b)$, absurd); aşadar, $c\in (a, b)$ şi cum *c* este maxim local, atunci conform teoremei lui Fermat $f'(c)=0$.

II. $m< f(a)$. Similar.

III. $m= M$. Atunci funcţia f este constantă pe *[a, b]*, deci $f'(c)=0$ pentru orice $c\in (a, b)$.

COROLAR. **Intre două zerouri ale unei funcţii derivabile pe un interval se află cel puţin un zerou al derivatei.**

Demonstraţie. Fie f: $\boldsymbol{I}\rightarrow\boldsymbol{R}$ *derivabilă pe un interval* ***I*** *şi a, b I, a< b, zerouri ale lui f. Atunci f(a)=0=f(b) şi putem aplica teorema lui Rolle pe intervalul [a, b].*

Teorema lui Rolle admite o interpretare geometrică evidentă: dacă segmentul determinat de punctele *(a, f(a)), (b, f(b))* este paralel cu axa O*x*, atunci există cel puţin un punct între a şi b în care tangenta la graficul lui *f* este paralelă cu axa O*x* (fig. 6).

Observaţii. Toate condiţiile din enunţul teoremei lui Rolle sunt necesare, în sensul că dacă s-ar renunţa la vreuna din ele, atunci concluzia nu ar mai fi întotdeauna adevărată.

a) Dacă *f* ar fi continuă numai pe intervalul deschis *(a, b)*, exemplul funcţiei $f(x)=\begin{cases} x, \text{ daca } x\in(0,1] \\ 1, \text{ daca } x=0 \end{cases}$ arată că *f '* nu se anulează pe intervalul *(0, 1)* deşi *f(0)=f(1)*. (fig. 7).

b) Dacă *f*(a) ≠ *f*(b), este suficient să considerăm funcţia *f(x)= x* pe *[0, 1]* (fig 8).

c) Dacă *f* nu ar fi derivabilă pe întreg intervalul *(a, b)*, concluzia teoremei ar fi falsă, aşa cum arată exemplul funcţiei *f(x)*=| *x* | pe intervalul *[-1, 1]*.

4.3 Teorema lui Lagrange şi teorema lui Cauchy.

TEORAMA 9. *(teorema lui J. Lagrange, 1736- 1813, a creşterilor finite).* **Fie *f* o funcţie Rolle pe un interval compact [a, b]. Atunci c∈ (a, b) astfel încât**

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

Demonstraţie. Vom considera funcţia auxiliară *F(x)=f(x)+kx, x*∈ *[a, b]*, cu *k* o constantă reală , pe care o vom determina din condiţia *F(a)= F(b)*. Aşadar avem că,

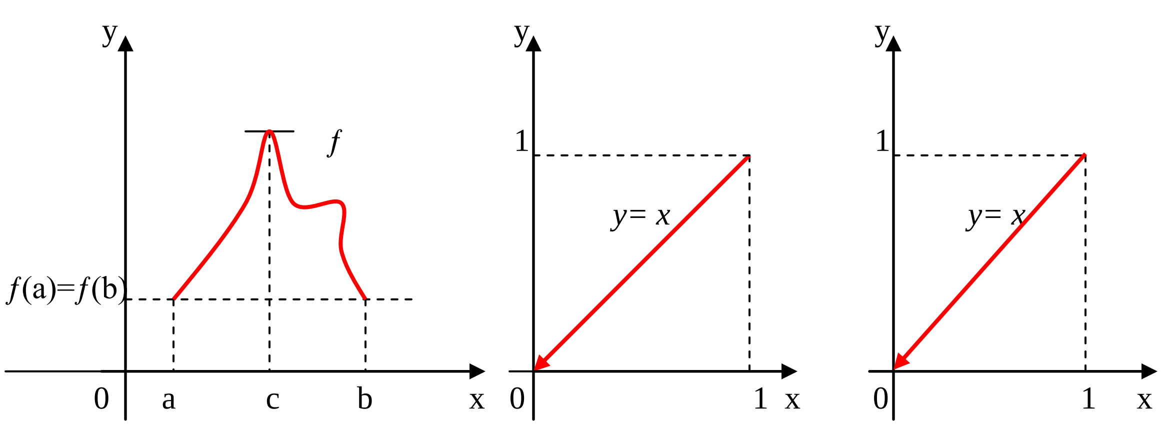


Fig 6. Fig 7. Fig 8.

$f(a)+ ka= f(b)+ kb$, deci $k=\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$. Pentru acest *k*, funcţia *F* verifică condiţiile teoremei lui Rolle şi, ca atare, există un punct c$\in$ (a, b) în care $F'(c)=0$. Pe de altă parte , $F'(x)=f'(x)+k$, $x \ni (a, b)$, deci $f'(c)+ k= 0$, $f'(c)+\frac{f(b)-f(a)}{a-b}= 0$ şi se obţine relaţia din enunţ.

Observaţii. 1) Relaţia din enunţ se mai numeşte formula creşterilor finite sau formula de medie pentru derivabilitate). Notând $\theta=\frac{c-a}{b-a}$, rezultă $0< \theta< 1$ şi

$c= a+ \theta(b- a)f'(a+ \theta(b- a))$, cu $0< \theta< 1$.

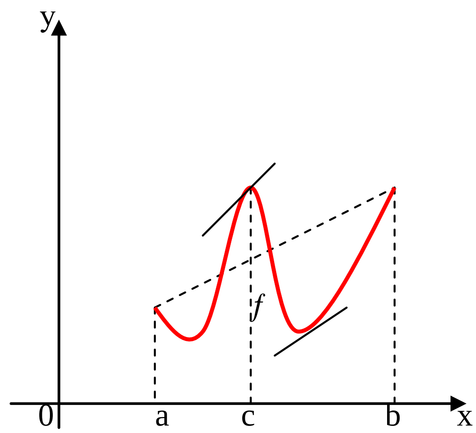


Fig 9.

2) Ca şi în cazul teoremei lui Rolle, punctul c nu este unic. Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange rezultă din interpretarea geometrică a derivatei şi este următoarea: există cel puţin un punct c(a, b) pentru care tangenta la graficul lui *f* in (c, *f*(c)) este paralelă cu „coarda" determinată de punctele (a, *f*(a)), (b, *f*(b)) (fig 9).

3) Putem aplica teorema lui Lagrange restricţiei lui *f* la orice subinterval [a, x] $\subset$ [a, b], unde $a< x\leq b$. Atunci $f(x)- f(a)= (x-a)f'(c)$ cu $a\in (a, x)$ nu neapărat unic, depinzând de *x*; uneori se scrie $c= c_x$, ca atare, $f(x)- f(a)= x- a)f'(c_x)$. Este important de remarcat că dacă $x\to a$, atunci $c_x\to a$.

Iată acum un corolar al teoremei lui Lagrange, care este util în a decide derivabilitatea unei funcţii într-un punct.

***COROLAR.* Fie *f* o funcţie definită într-o vecinătate V a punctului x_0, derivabilă pe V\{x_0} şi continuă în x_0. Dacă există limita $\lim_{x\to x_0}=\lambda$, atunci *f'*(x_0) există şi *f'*(x_0)=λ. Dacă limita este finită, atunci *f* este derivabilă în x_0.**

Demonstraţie. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei *f* pe un interval $[x, x_0]\subset V$, $x< x_0$, rezultă $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c_x)$ *cu* $x< c_x< x_0$,, deci $f_s'(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}f'(c_x)=\lambda$ (căci $c_x\to x_0$, dacă $x\to x_0$, $x<x_0$). In mod similar, $f_d'(x_0)$ există şi este egală cu λ, deci *f* are derivată în x_0 şi $f'(x_0)=\lambda$.

Trecem acum la demonstrarea unei alte proprietăţi fundamentale legete de derivabilitate. Fie două funcţii $f, g:[a, b]\to \mathbf{R}$ verificând condiţiile teoremei lui Lagrange şi presupunem că $g'(x) \neq 0$, $x\in (a, b)$. Ne interesează raportul $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Aplicând separat funcţiilor *f* şi *g* teorema lui Lagrange, rezultă că există puncte *c, c'* din *(a, b)* astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{(b-a)f'(c)}{(b-a)g'(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. Nu există nici un motiv să considerăm aici că avem *c= c'*; totuşi se poate demonstra..

TEOREMA 10. *(teorema lui Cauchy).* **Fie *f*, *g* două funcţii Rolle pe intervalul compact *[a, b], a< b,* astfel încât *g'(x)* $\neq 0$*, x*$\in$*(a, b*); atunci există un punct c$\in$ (a, b) astfel încât**

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstraţie. Condiţia *g'(x)* $\neq 0$ pentru orice x$\in$(a, b) implică faptul că *g(a)* $\neq$ *g(b)*; într-adevăr, dacă *g(a)=g(b)*, aplicând teorema lui Rolle , ar rezulta că există *c*$\in$ *(a, b)* astfel ca *g'(c)=0*, ceea ce contravine ipotezei.

Considerăm funcţia ajutătoare *F(x)=f(x)+kg(x), k*$\in$***R*** şi determinăm *k* astfel ca *F(a)=F(b),* deci *k*=$\frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)}$. Aplicând teorema lui Rolle funcţiei *F* cu *k* astfel determinat, există *c*$\in$ *(a, b)* astfel încât *F'(c)=0*. Dar *F'(x)=F'(x)+kg'(x), x*$\in$ *(a, b),* deci *f'(c)+kg'(c)=0, -k*=$\frac{f'(c)}{g'(c)}$, de unde se obţine relaţia ce trebuia demonstrată.

Observaţie. Am fi putut mai întâi sa demonstrăm teorema lui Cauchy şi apoi, pentru *g(x)=x*, am fi demonstrat teorema lui Lagrange..

In cele ce urmează, vom indica o proprietate importantă a funcţiilor care admit primitive, deci care sunt derivate ale altor funcţii.

TEOREMA 11. *(teorema lui Darboux).***Dacă *f*: I→R este o funcţie derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa *f'* are proprietatea lui Darboux (adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare).**

Demonstraţie. Fie *a<b* două puncte din ***I*** astfel încât *f'(a)=f'(b)*. Pentru a fixa ideile, să presupunem că *f*'(a)<*f*'(b). Fie λ$\in$ (*f*'(a), *f*'(b)). Trebuie arătat că există un punct *c*$\in$ *(a, b)* astfel încât *f'(c)=λ*. Pentru aceasta vom considera funcţia auxiliară F(x)=*f*(x)-λx; evident, *F'(a)=f'(a)-λ<0* şi *F'(b)=f'(b)-λ>0*.

Funcţia *F* este derivabilă, deci continuă în intervalul *[a, b]* şi, ca atare, marginea inferioară m= $\inf_{x\in[a,b]}$ *F(x)* este atinsă, într-un punct *c*$\in$ *[a, b]*. Vom arăta că de fapt m nu poate fi atins nici în *a*, nici în *b*. Aşadar, *c*$\in$ *(a, b)* şi din teorema lui Fermat se obţine *F'(c)=0*. Dar aceasta arată că *f'(c)-λ=0*, adică *f'(c)=λ*, tocmai ce trebuia verificat.

Pentru a arăta că punctul *c* aparţine intervalului *(a, b),* vom proceda astfel: alegem *ε>0* astfel încât |*F'(a)*|>*ε* şi *F'(b)>ε*. Din definiţia derivatei lui *F* în punctele *a* şi *b*, există *δ>0* depinzând de *ε* astfel încât din faptul că |*x*- *a*|>*δ* (respectiv |*x*- *b*|>*δ*) să rezulte că

$$F'(a)-\varepsilon<\frac{F(x)-F(a)}{x-a}<F'(a)+\varepsilon$$
$$\left[\text{respectiv}\quad F'(b)-\varepsilon<\frac{F(x)-F(b)}{x-b}<F'(b)+\varepsilon\right].$$

Deoarece $F'(a)+\varepsilon<0$, raportul va fi strict negativ, pentru orice $x>a$, $x-a<\delta$. Deci $F(x)-(a)<0$, adică $F(x)<F(a)$. In mod analog, din inegalitatea $F'(b)-\varepsilon>0$, rezultă că $F(x)<F(b)$ pentru $x<b$, $x-b<\delta$. Aceste inegalităţi arată că marginea inferioară a funcţiei F nu este atinsă nici în a, nici în b.

***COROLAR*. Fie *f*: *I*→*R* o funcţie derivabilă pe un interval *I*. Dacă derivata *f'* nu se anulează pe *I*, atunci *f'* are semn constant pe *I*.**

Intr-adevăr, dacă *f'* nu ar avea semn constant pe ***I***, atunci ***f'*** ar lua valori pozitive şi valori negative pe ***I***, deci, conform teoremei lui Darboux, ar lua valoarea zero, ceea ce contravine ipotezei că *f'* nu se anulează pe ***I***.

Aplicaţii. Funcţii derivabile

ξ1. Subiecte date la admitere în învăţământul superior şi bacalaureat (M. E. Panaitopol).

P₁. *Fie funcţia f:* ***R*** *→****R****, f(x)= max (x^2- 2x- 3, x- 5) pentru orice x∈****R****..*
1). Să se studieze continuitatea lui f
2). Să se studieze derivabilitatea lui f.

Chimie, Constanţa 1997

<u>Soluţie</u> :

$$f(x)=\max\,(x^2-2x-3,x-5)=\begin{cases}x^2-2x-3, \text{daca} & x^2-2x-3>x-5\\ x-5, \text{daca} & x^2-2x-3\le x-5\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}x^2-2x-3, \text{daca} & x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\\ x-5, \text{daca} & x\in[1,2]\end{cases}$$

Caz I. $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

f este continuă pe intervalul $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ deoarece , fiind un polinom de gradul 2, este elementară , şi orice funcţie elementară este continuă.

Caz II. $x\in[1,\ 2]$

f de asemenea este continuă pe intervalul $x\in[1,\ 2]$ deoarece este un polinom de gradul 1.

In continuare studiem derivabilitatea in *x= 1* şi *x= 2*. Pentru ca *f* să fie derivabilă în cele două puncte trebuie ca $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, respectiv $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^2-2x-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}(x-1)=0 \qquad \lim_{\substack{x\to1\\x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to1\\x<2}}\frac{x-5+3}{x-2}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x-1}{x-1}=1 \qquad \lim_{\substack{x\to1\\x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^2-2x-3+3}{x-2}=0$$

Din relaţiile de mai sus rezultă că *f* nu este derivabilă în punctele *x= 1* şi în *x= 2.*
Dacă $x\in$***R***-{1,2} rezultă că *f* este derivabilă deoarece este elementară .

Caz I. $x\in(-\infty,\ 1)\cup(2,\ +\infty)$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2-2x-3-x_0^2+2x_0+3}{x-x_0}=2(x-1)$$

Caz II. $x\in(1,\ 2)$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-5-x_0+5}{x-x_0}=1$$

Prin urmare derivata funcţiei din enunţ este :

$$f(x)=\begin{cases}2(x-1),\text{daca} & x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)\\ 1,\text{daca} & x\in(1,\ 2)\end{cases}$$

P₂. *Se dă funcţia f:* ***D***$\to$***R*** *prin f(x)=* $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$. *Se cere să se determine domeniul maxim de definiţie* ***D*** *apoi să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f pe acest domeniu. In ce puncte f nu este derivabilă?*

Ştiinţe economice, Cluj Napoca 1995

Soluţie:

Condiţiile de existenţă a funcţiei sunt :

$$\begin{cases}x-4\geq0\\ x-4\sqrt{x-4}\\ x+4\sqrt{x-4}\end{cases}\Leftrightarrow\ x\in(4,+\infty).$$ Domeniul maxim de definiţie este ***D***= $(4,\ +\infty)$.

$f(x)=\sqrt{x}\circ\left[x+4\sqrt{x}\circ(x-4)\right]+\sqrt{x}\left[x-4\sqrt{x}\circ(x-4)\right]$. De aici rezultă că *f* este continuă ca fiind o sumă de compuneri de funcţii elementare. Pe *f* îl mai putem scrie astfel :

$f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}=|\sqrt{x-4}+2|+|\sqrt{x-4}-2|$.

$$\left.\begin{array}{l} |\sqrt{x-4}+2|=\begin{cases}\sqrt{x-4}+2, & \text{daca } \sqrt{x-4}\geq -2 \Leftrightarrow x\geq 8\\ -\sqrt{x-4}-2, & \text{daca } \sqrt{x-4}> -2 \Leftrightarrow x> 8\end{cases} \\ |\sqrt{x-4}-2|=\begin{cases}\sqrt{x-4}-2, & \text{daca } \sqrt{x-4}\geq 2 \Leftrightarrow x\geq 8\\ -\sqrt{x-4}+2, & \text{daca } \sqrt{x-4}< 2 \Leftrightarrow x< 8\end{cases}\end{array}\right\rangle \Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases}4, & daca \quad x\in[4,\,8]\\ 2\sqrt{x-4}, & daca \quad x\in(8,+\infty)\end{cases}.$$

f este derivabilă deoarece este o compunere de funcţii elementare.
In continuare studiem derivabilitatea în $x=8$.

$$f_s'(8)=\lim_{\substack{x\to 8\\ x<8}}\frac{4-4}{x-8}=0;$$

$$f_d'(8)=\lim_{\substack{x\to 8\\ x>8}}\frac{2\sqrt{x-4}-4}{x-8}=\frac{1}{2}.$$

Prin urmare f nu este derivabilă în $x=8$.

***P*$_3$.** *Dacă f: $(-a,\, a)\to(0,+\infty)$ cu $a>0$ este o funcţie derivabilă cu derivata f' continuă şi $f(0)=1$. Să se arate că:* $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^{\frac{1}{x}}=e^{f'(0)}$.

Matematică, Sibiu, 1996

<u>Soluţie</u> :

Pentru a arăta că relaţia din enunţ este adevărată pentru $f(0)=1$ ne folosim de următoarea formulă

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0\\ f\to 0}}(1+f)^{\frac{1}{f}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(f(x))^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+(f(x)-1)\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}=e^{f'(0)}.$$

***P*$_4$.** *Se consideră funcţia f: $(0,+\infty)\to$ **R**, $f(x)=\begin{cases}ln^3(x)\ , & x\in(0,\ e]\\ ax+b\ , & x\in(e,\,+\infty)\end{cases}$ unde $a\in$ **R** şi $b\in$ **R**. Să se determine a şi b astfel încât funcţia să fie derivabilă în $x=e$.*

A. S. E., 1995

<u>Soluţie</u> :

Pentru ca f să fie derivabilă in e trebuie ca f să fie continuă în e. Adică,
$\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}}f(x)=f(e)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}}f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} \ln^3 x=\ln^3 e=1\\ f(e)=\ln^3 e=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} \ln^3 x=\ln^3 e=1\end{array}\right\rangle \Rightarrow ae+b=1 \Leftrightarrow \underline{b=1-ae}$$

Pentru ca f să fie derivabilă în e trebuie ca :

$f_s'(e)=f_d'(e)$.

$$\left.\begin{array}{l}f_s'(e)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}}\frac{(\ln x-\ln e)(\ln^2 x+\ln x\cdot\ln e+\ln^2 e)}{x-e}=3\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=3f'(e)=\frac{3}{e};\\ f_d'(e)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}}\frac{ax-ae}{x-e}=a\end{array}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{3}{e} \Leftrightarrow b=1-\frac{3}{e}e \Leftrightarrow b=-2.$$

Prin urmare pentru ca f să fie derivabilă în e trebuie ca $a=\frac{3}{e}$ *şi* $b=-2$.

P_5. *Fie $a\in R$, f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă în a. Să se arate că funcţia g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=|x-a|\,f(x)$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, este derivabilă în a dacă şi numai dacă $f(a)=0$.*

Matematică, Constanţa,1997

<u>Soluţie</u> :

Explicităm funcţia g

$$g(x)=|x-a|\,f(x)=\begin{cases}(a-x)f(x)\ , & x\in(-\infty,a]\\ (x-a)f(x)\ , & x\in(a,+\infty)\end{cases}$$

Pentru ca funcţia g să fie derivabilă în a trebuie ca $g_s'(a)=g_d'(a)$

$$\left.\begin{array}{l}g_s'(a)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{(a-x)f(x)}{x-a}=-f(a)\\ g_d'(a)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f(a)\end{array}\right\rangle \Rightarrow g_s'(a)=g_d'(a) \Leftrightarrow f(a)=0,$$ ceea ce este evident.

P_6. *Fie f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dată prin : $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c\ , & x>0\\ e^{-x}\ , & x\le 0\end{cases}$. Să se determine parametrii reali a, b, c astfel încât f să fie derivabilă de două ori pe **R** şi pentru valorile găsite să se calculeze f'.*

Colegiul de Informatică, Cluj Napoca, 1996

<u>Soluţie</u> :

Pentru ca f să fie derivabilă de două ori pe **R** trebuie să fie continuă. f este continuă pe ***R**-{0}* deoarece este compunere de funcţii elementare. Pentru ca f să fie continuă în punctul o trebuie ca $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=f(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=e^{-0}=1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{-x}=1 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \underline{c=1}$$

Dacă f este continuă pe $\boldsymbol{R}^*$ atunci este şi derivabilă .In continuare studiem derivabilitatea în punctul *0*. f este derivabilă în punctul *0* ⇔ $f_s'(0)=f_d'(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-1 \\ f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{ax^2+bx}{x}=b \end{array}\right\rangle \Rightarrow \underline{b=-1}$$

Caz I. $x\leq 0$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x0}\frac{e^{-x}-e^{-x_0}}{x-x_0}=-e^{-x_0}\lim_{x\to x0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}=-e^{-x_0}$$

Caz II. $x>0$

$$f'(x_0)=\lim\frac{ax^2+bx+c-ax_0^2-bx_0-c}{x-x_0}=2ax-1$$

Conform celor două cazuri derivata funcţiei este :

$f'(x)=\begin{cases}2ax-1 & ,\ x>0\\ -e^{-x} & ,\ x\leq 0\end{cases}$.Pentru ca funcţia să fie de două ori derivabilă pe R trebuie ca $f_s''(0)=f_d''(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_d''(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{2ax-1+1}{x}=2a \\ f_s''(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{-e^{-x}+1}{x}=1 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \underline{a=\frac{1}{2}}.$$

După aflarea lui a, b , c funcţia devine

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-x+1 & ,\ x>0\\ e^{-x} & ,\ x\leq 0\end{cases}.$$

***P*$_7$.** *Să se arate că :*

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{n(n+1)}{2} & ,\ x=1\\ \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2} & ,\ x\neq 1\end{cases}$$

Matematică, Piteşti, 1996

<u>Soluţie</u> :

Considerăm cele două cazuri , când $x=1$ şi când $x\neq 1$.

Caz I. $x=1$

Se obţine suma primelor n numere naturale care se demonstrează prin inducţie matematică: $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.

Caz II. $x\neq 1$

$\sum_{k=1}^{n} x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.Derivând această relaţie se obţine

$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'=\frac{(x^{n+1}-1)'(x-1)-(x-1)'(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, tocmai ce era de demonstrat.

P₈. *Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ o funcţie care verifică relaţia $x\leq f(x)\leq x+x^2$, oricare ar fi $x\in[-1,1]$. Arătaţi că f este derivabilă în origine şi calculaţi $f'(0)$.*

Matematică, Iaşi, 1990

<u>Soluţie</u> :

$x\leftarrow 0 \Rightarrow 0\leq f(0)\leq 0 \Rightarrow f(0)=0;$

$x>0 \Rightarrow 1\leq\frac{f(x)}{x}\leq 1+x \Leftrightarrow 1\leq \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \leq \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}(1+x) \Leftrightarrow f_d'(0)=1;$

$x<0 \Rightarrow 1>\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{f(x)}{x}\geq 1+x \Leftrightarrow f_s'(0)=1.$

P₉. *Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}$. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei f, $n\in\mathbf{N}^*$.*

Academia Tehnică Militară, 1996

<u>Soluţie</u> :

Fie $f_1(x)=\sqrt[3]{x-1}$ şi $f_2(x)=\sqrt[3]{x+1}$.

$$f_1'(x)=\left(\sqrt[3]{x-1}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$f_1''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right)'=\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

$$f_1'''(x)=\left(\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}\right)'=\frac{10}{27\sqrt[3]{(x-1)^8}}$$

………………………………………………

Presupunem că $f_1^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3k-4)}{3^{k+1}\sqrt[3]{(x-1)^{3k-1}}}$ pentru $k\geq 2$ şi demonstrăm că

$$f_1^{(k+1)}(x)=(-1)^{k-1}(-1)\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3k-4)(3k-1)}{3^{k+1}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^{3k+2}}}$$

$$f_1^{(k+1)}(x)=\left(f_1^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^{k-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3k-4)}{3^{k+1}\sqrt[3]{(x-1)^{3k-1}}}\right)'=(-1)^k\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3k-1)}{3^{k+1}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^{3k+2}}}$$

Analog se calculează şi derivata de ordinul n a funcţiei f_2 care este

$$f_2^{(k+1)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3k-4)(3k-1)}{3^k\cdot\sqrt[3]{(x-1)^{3k+2}}}$$

$$f^{(n)}(x)=f_1^{(n)}(x)+f_2^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)(3n-1)}{3^{n-1}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^{3n+2}}}+(-1)^{k-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)(3n-1)}{3^{n-1}\sqrt[3]{(x+1)^{3n+2}}}$$

P_{10}. *Să se arate că nu există nici un polinom, a cărui restricţie la intervalul [0, 1] să fie egală cu funcţia $f:[0, 1]\to R$ dată de $f(x)= ln(1+ x)$.*

Învăţământ economic 1981

Soluţie :

Presupunem că există $P= a_0x^n+ a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\in \boldsymbol{R}[x]$ astfel încât restricţia sa la $[0, 1]$ să coincidă cu funcţia f. Deoarece P este un polinom de grad n, derivata sa de ordin $(n+1)$ este nulă, $P^{(n+1)}(x)=0$ pentru orice $x\in [0, 1]$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x};\ f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2};\ f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3};$$

Presupunem că : $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+k)^k}\ \forall x\in[0,1].$

$$f^{(k+1)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!(-k)}{(1+k)^{k+1}}=(-1)^k\frac{k!}{(1+x)^{k+1}}\ \forall x\in[0,1].$$

$$f(x)=P(x)\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow f^{(k+1)}(x)=P^{(k+1)}(x)\ \ \forall x\in[0,1]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}=0\ \ \forall x\in[0,1]\ \text{ceea ce este fals.}$$

P_{11}. *Să se arate că au loc inegalităţile :*

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 50^\circ<\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{36}$$

Matematică, Braşov, 1990

Soluţie :

$$\left.\begin{array}{l}\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin 50^\circ>\sin 45^0\end{array}\right\rangle\Rightarrow \sin 50^\circ>\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Fie $f(x)=\sin x$: $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{18}\right]$,care verifică condiţiile teoremei lui Rolle, deci putem spune că este o funcţie Rolle. Aplicând teorema lui Lagrange rezultă că

$$\left.\begin{array}{l}\exists\, c \in (a,\, b) \text{ cu } \frac{\pi}{4} < c < \frac{5\pi}{18} \text{ astfel incat } \sin\frac{5\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{4} = \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{4}\right)\cos c \\ \cos c < 1\end{array}\right\rangle \Rightarrow \sin 50^o < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{36}.$$

P_{12}. *Verificaţi aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru funcţia $f:[a,\, b]\to\mathbf{R}$, $a,\ b>0$, definită prin $f(x)=1+x\ln x$ şi demonstraţi inegalităţile*

$$a < \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} < b.$$

Informatică, Iaşi 1996

Soluţie :

$f(x) = 1 + x\ln x = (1+x)\circ x\ln x = (1+x)\circ x^2 \circ \ln x \Rightarrow$ f este continuă pe $[a,\, b]$ şi derivabilă pe $(a,\, b)$ fiind o compunere de funcţii elementare.

Aplicând teorema lui Lagrange rezultă că

$$c \in (a,b) \text{ ai. } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\frac{b\ln b - a\ln a}{b-a} = 1 + \ln c \Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\ln\frac{b^b}{a^a} = \ln ec \Leftrightarrow \ln\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} = \ln ec \Leftrightarrow \left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} = ec \Leftrightarrow c = \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

Cum $a< c< b$ rezultă că

$$a < \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} < b.$$