

# METODA INDUCTIEI MATEMATICE COMPLETE. ANALIZA COMBINATORIE. BINOMUL LUI NEWTON. SUME.

## 1. METODA INDUCTIEI MATEMATICE COMPLETE

Este o metoda de rationament prin care stabilim ca:

O proprietate  $P(n)$  care depinde de un numar natural  $n$  este verificata pentru orice numar natural  $n \geq k$  atunci sunt satisfacuate simultan conditiile:

- a) Proprietatea  $P(n)$  este adevarata pentru  $n=k$ ;  $k \in \mathbb{N}$
- b)  $(P(k), k \leq n) \Rightarrow P(n+1)$ ,  $(\forall) n \geq k$ , adica presupunem  $P(k)$  adevarata pentru orice  $k \leq n$  rezulta  $p(n+1)$  adevarata, pentru orice  $n \geq k$ .

## 2. PERMUTARI

Fie  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  o multime finita cu  $n$  elemente. Se numeste permutare a multimii  $E$  orice functie bijectiva  $f : E \rightarrow E$ .

Notam permutarea in felul urmatoare

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

Notam numarul de permutari  $P_n$ :

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$$

conditie de existenta:

$$n \in \mathbb{N}$$

conventie:

$$0! = 1 ; 1! = 1$$

$$P_n = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$$

## 3. ARANJAMENTE

Notam cu  $A_n^k$

Sistemele ordonate cu  $k$  elemente, care se pot forma cu elementele unei multimii cu  $n$  elemente ( $n \geq k$ ), se numesc aranjamente de  $n$  elemente luate cate  $k$ .

$$A_n^k = n! / (n-k)! = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = (n-k+1) A_n^{k-1}$$

c.e.  $n \geq k$

$$\text{conventie: } n=k \Rightarrow A_n^n = P_n$$

## 4. COMBINARI $C_n^k$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k} = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$$

$$\text{conventie: } C_n^0 = C_n^n = 1 \quad \text{c.e. } n \geq k$$

Formule pentru combinari complementare:  $C_n^k = C_n^{n-k}$   
 $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

## 5. BINOMUL LUI NEWTON

Daca  $a, b \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ , atunci:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

sau

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n T_{k+1}, \text{ unde } T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

$T_{k+1}$  = termen general

$k$  = se numeste rangul termenului al dezvoltarii

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \dots + (-1)^{n-k} C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a b^{n-1} + (-1)^n C_n^n b^n$$

sau

$$(a-b)^n = (-1)^k \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n T_{k+1}, \text{ unde } T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

**Obs:** 1) in dezvoltarea  $(a+b)^n$ , dupa formula lui Newton, sunt  $n+1$  termeni.

2)  $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$  se numesc coeficienti binomiali

3) Sa se faca distinctie intre coeficientul unui termen al dezvoltarii si coeficientul binomial al aceluasi termen.

4) Pentru a determina rangul celui mai mare termen folosim relatia:

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{n-k}{k+1} \frac{b}{a} \text{ si studiem doua cazuri:}$$

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} \geq 1 \quad \text{si} \quad \frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} < 1$$

5) In dezvoltarea  $(a+b)^n$  si  $(a-b)^n$ , daca  $a=b$  atunci:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$$

6) Identitatile utile:

a)  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}$

b)  $C_{n+k}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0$

7) Suma puterilor asemenea ale primelor  $n$  numere naturale

Fie  $k \geq 1$  un numar natural si  $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$

a)  $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Folosim dezvoltarea  $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$  pentru demonstratie unde  $a = 1, 2, \dots, n$ .

$$b) S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Folosim dezvoltarea  $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ , pentru demonstratie, unde  $a=1,2,\dots,n$ .

$$c) S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Folosim dezvoltarea  $(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$ , pentru demonstratie, unde  $a=1,2,\dots,n$ .

$$d) S_k = \frac{(n+1)^{k+1} - (n+1) - \sum_{p=2}^k C_{k+1}^p \cdot S_{p-1}}{C_{k+1}^1}$$

### Caz particular

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n+2)}{30}$$

## 6. PROGRESII ARITMETICE SI GEOMETRICE

### a) PROGRESII ARITMETICE ☺

**Teorema** : Fie numerele  $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  in progresie aritmetica. Atunci:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

**Def**: Fie numerele  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  in progresie aritmetica, daca  $a_n = a_1 + (n-1)r$  sau  $a_n = a_{n-1} + r$ , unde:

$a_n$  = ultimul termen

$a_1$  = primul termen

$a_{n-1}$  = penultimul termen

$n$  = numarul de termeni

$r$  = ratia progresiei aritmetice

**Obs**: Pentru verificare  $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1}$

$$P: S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2}$$

### b) PROGRESII GEOMETRICE ☺☺

**Teorema**: Fie numerele  $b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$  in progresie geometrica. Atunci

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

**Def:** Fie numerele  $b_1, b_2, \dots, b_n$  in progresie geometrica, daca  $b_n = b_1 \cdot q^n$  sau  $b_n = b_{n-1} \cdot q$  unde:  $b_n$ =ultimul termen

$b_1$ =primul termen

$b_{n-1}$ =penultimul termen

$n$ =numarul de termeni

$q$ =ratia progresiei geometrice

**Obs:** pentru verificare  $q = a_2/a_1 = a_3/a_2 = \dots = a_n/a_{n-1}$

$$\mathbf{P: S_n = b_1(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}) = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$