Cuprins…

I.Mulţimea polinoamelor cu coeficineţi complecşi……3
I.1. Definirea polinoamelor……3
I.2. Adunarea şi înmulţirea……3
I.3. Forma algebrică……6
I.4. Gradul unui polinom……6
I.5 Val pol. într-un punct……7
I.6. Împărţirea polinoamelor……7
I.7. Divizibilitatea polinoamelor……..9
I.8. Rădăcinile polinoamelor……..11
II. Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali……13
III. Multţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi şi raţionali……14
IV. Aplicaţii……..15
IV.1. Probleme rezolvate……15
IV.2. Probleme propuse……..19

Polinoame cu coeficienţi complecşi

I. Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi

I.1.Definirea polinoamelor

Fie C[X] mulţimea şirurilor(infinite) de numere(complexe) $f=(a_0,a_1,a_2,...,a_n,...)$, care au numai un număr finit de termeni a_i,nenuli, adică există un număr natural *m*, astfel încât $a_i=0$, pentru orice i>m.

De exemplu, şirurile $f=(0,-1,2,0,0,...)$; $g=(-1,i,2,0,0,...)$; $h=(1+2i,7,-100,2,0,0,...)$ sunt şiruri infinite care au un număr finit de termeni nenuli. Şirul g are 3 termeni nenuli, iar h are 4 termeni nenuli. Deci aceste şiruri sunt elemente din mulţimea C[X].

I.2. Adunarea şi înmulţirea polinoamelor

Definim pe mulţimea C[X] două operaţii algebrice: adunarea şi înmulţirea.

- Adunarea polinoamelor:

Fie $f=(a_0,a_1,a_2,...,a_k,...)$, $g=(b_0,b_1.b_2,...,b_k,...)$ două elemente din mulţimea C[X]; atunci definim:

$$f+g=(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_k+b_k,...),\quad \forall k\in N$$

- Proprietăţile adunării polinoamelor:

(C[X],+) se numeşte grup abelian

1. Asociativitatea

$(f+g)+h=f+(g+h)$, $\forall f,g,h\in C[X]$

Într-adevăr, dacă $f=(a_0,a_1,a_2,...)$, $g=(b_0,b_1,b_2,...)$ şi $h=(c_0,c_1,c_2,...)$ atunci avem $f+g=(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,...)$ şi deci $(f+g)+h=((a_0+b_0)+c_0,(a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2,...)$.

Analog, obţinem că $f+(g+h)=(a_0+(b_0+c_0),a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2),...)$. Cum adunarea numerelor este asociativă, avem $(a_i+b_i)+c_i=a_i+(b_i+c_i)$, pentru orice $i\geq 0$.

2. Comutativitatea

$f+g=g+f$, $\forall f,g\in C[X]$

Într-adevăr, dacă $f=(a_0,a_1,a_2,...)$ şi $g=(b_0,b_1,b_2,...)$, avem $f+g=(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,...)$, $g+f=(b_0+a_0,b_1+a_1,b_2+a_2,...)$
Cum adunarea numerelor complexe este comutativă, avem $a_i+b_i=b_i+a_i$ pentru orice $i\geq 0$. Deci $f+g=g+f$.

3. Element neutru

Polinomul constant 0=(0,0,0,…) este element neutru pentru adunarea polinoamelor, în sensul că oricare ar fi $f\in C[X]$,avem:

$$f+0=0+f=f$$

4. Elemente inversabile

Orice polinom are un opus, adică oricare ar fi $f\in C[X]$, există un polinom, notat $(-f)$, astfel încât:

$$f+(-f)=(-f)+f=0$$

De exemplu, dacă $f=(-1,0,2,2,0,0,...)$ este un polinom, atunci opusul său este $-f=(1,0,-2,-2,0,0,...)$

- Înmulţirea polinoamelor:

Fie $f=(a_0,a_1,a_2,...)$, $g=(b_0,b_1,b_2,...)$

Atunci definim:

$$f\bullet g=(a_0b_0,a_0b_1+a_1b_0,a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,...,\underbrace{a_0b_k+a_1b_{k-1}}_{c_k}+...+...,...)$$

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$$

- Proprietăţile înmulţirii:

1. Asociativitatea

Oricare ar fi $f,g,h \in C[X]$, avem:

$$(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$$

2. Comutativitatea

Oricare ar fi $f,g \in C[X]$, avem:

$$f \bullet g = g \bullet f$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, atunci notând $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ şi $gf = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$, avem $c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \ldots + a_r b_0$ şi $d_r = b_0 a_r + b_1 a_{r-1} + \ldots + b_r a_0$. Cum adunarea şi înmulţirea numerelor complexe sunt comutative şi asociative, avem $c_r = d_r$, pentru orice $r \geq 0$. Deci $fg = gf$.

3. Element neutru

Polinomul $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ este element neutru pentru înmulţirea polinoamelor, adică oricare ar fi $f \in C[X]$, avem:

$$f \bullet 1 = 1 \bullet f = f$$

4. Elemente inversabile

$f \in C[X]$ este inversabil dacă există f^{-1}, a.î.:

$$f \bullet f^{-1} = f^{-1} \bullet f = 1$$

Singurele polinoame inversabile sunt cele constante nenule: $f = (a, 0, 0, 0, \ldots)$, $a \neq 0$.

5. Distributivitatea

Oricare ar fi polinoamele $f,g,h \in C[X]$, are loc relaţia:

$$f(g+h) = fg + fh$$

1.3. Forma algebrică a polinoamelor

Notaţia $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ introdusă pentru polinoame nu este prea comodă în operaţiile cu polinoame. De aceea vom folosi altă scriere.

Dacă considerăm $f=(a_0,a_1,...,a_n,0,0,...)$, atunci f se va scrie sub forma: $f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$. Au loc notaţiile: $a=(a,0,0,...)$

$$X=(0,1,0,0,...)$$
$$X^2=(0,0,1,0,...)$$
$$X^n=(0,0,...,0,1,0,...)$$

Exemplu: $f=(1,2,3,0,0,...)=1+2X+3X^2$

$g=(1,2,3,4,0,0,...)=1+2X+3X^2+4X^3$

Atunci:

$$f\bullet g=(1+2X+3X^2)(1+2X+3X^2+4X^3)=1+4X+X^2(1\bullet 3+2\bullet 2+3\bullet 1)$$
$$+X^3(1\bullet 4+2\bullet 3+3\bullet 2)+X^4(2\bullet 4+3\bullet 3)+X^5(3\bullet 4)$$
$$f+g=1+1+X(2+2)+X^2(3+3)+4X^3$$

I.4. Gradul unui polinom

Fie $f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$. Se numeşte gradul lui f, notat prin $gradf$, cel mai mare număr natural n astfel încât $a_n\neq 0$.

Exemple: 1. Polinomul $f=1-X$ are gradul 1;

2. Polinomul $f=X+X^3-X^5$ are gradul 5;

3. Polinomul constant $f=a$, unde $a\in C$, are gradul 0.

Referitor la gradul sumei şi produsului a două polinoame f şi g, au loc următoarele relaţii:

i) $grad(f+g)\leq \max(gradf,gradg)$;

ii) $grad(fg)=gradf+gradg$.

I.5. Valoarea unui polinom într-un punct

Fie $f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$, atunci funcţia polinomială asociată polinomului f este:

$F:R\to R$, $F(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$.

I.6. Împărţirea polinoamelor

* Teorema de împărţire cu rest:

$\forall f, g \in C[X], \exists\, q, r \in C[X]$, $f = qg + r$, cu $gradr < gradg$

Polinomul f se numeşte deîmpărţit, g împărţitor, q cât, iar r rest. Vom efectua împărţirea polinomului $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ la polinomul $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots + b_mX^m$.

f	g
$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$	$b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \ldots + b_0$
$-a_nX^n - \frac{a_nb_{m-1}}{b_m}X^{n-1} - \ldots - \frac{a_nb_0}{b_m}X^{n-m}$	$\frac{a_n}{b_m}X^{n-m} + \frac{a_{n_1}}{b_m}X^{n_1-m} + \ldots + \frac{a_{n_p}}{b_m}X^{n_p-m}$
	q
$f_1 = a_{n_1}X^{n_1} + a_{n_1-1}X^{n_1-1} + \ldots + a_0$	
$-a_{n_1}X^{n_1} - \frac{a_{n_1}b_{m-1}}{b_m}X^{n_1-1} - \ldots - \frac{a_{n_1}b_0}{b_m}X^{n_1-m}$	
$f_2 = a_{n_2}X^{n_2} + a_{n_2-1}X^{n_2-1} + \ldots + a_0$	
.....	
$f_p = a_{n_p}X^{n_p} + \ldots + a_0$	
$-a_{n_p}X^{n_p} - \ldots\ldots - \frac{a_{n_p}b_0}{b_m}X^{n_p-m}$	
$f_{p+1} = a_{n_{p+1}}X^{n_{p+1}} + \ldots + a_0$	

Acest tabel ne redă regula(algoritmul) de împărţire a polinoamelor, pe care o vom aplica în practică pentru obţinerea câtului şi restului împărţirii.

Exemplu: Fie polinoamele $f = 2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1$ şi $g = X^2 - 3$. Să determinăm câtul şi restul împărţirii lui f la g.

$2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1$	$X^2 - 3$

$$\begin{array}{r|l} -2X^5 \quad +6X^3 & 2X^3+X^2+X+3 \\ \hline X^4+X^3-8X+1 & \underline{\quad} \\ -X^4 \quad +3X^2 & q \\ \hline X^3+3X^2-8X+1 & \\ -X^3 \quad +3X & \\ \hline 3X^2-5X+1 & \\ -3X^2 \quad +9 & \\ \hline -5X+10 & \\ \underline{\quad} & \\ r & \end{array}$$

Deci câtul este $q=2X^3+X^2+X+3$, iar restul $r=-5X+10$. Formula împărţirii cu rest se scrie,în acest caz astfel:

$$2X^5+X^4-5X^3-8X+1=(X^2-3)(2X^3+X^2+X+3)+(-5X+10).$$

- Împărţirea prin X-a. Schema lui Horner.

Fie $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0$. În cele ce urmează ne vom folosi de schema lui Horner pentru a împărţi polinomul f la polinomul $g=X-a$.

X^n a_n	X^{n-1} a_{n-1}	X^{n-2} a_{n-2}	.....	X^1 a_1	X^0 a_0
a_n	$a_{n-1}+ab_{n-1}$	$a_{n-2}+ab_{n-2}$	.....	a_1+ab_1	a_0+ab_0
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	.....	b_0	r

În rândul de sus al tabelului se scriu coeficienţii polinomului f, iar în rândul de jos coeficienţii $b_{n-1},b_{n-2},\ldots,b_0$ ai câtului şi restul r.

Exemplu: Utilizând schema lui Horner, să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f=2X^4-5X^3-8X+1$ şi binomul $X-2$.

X^4	X^3	X^2	X	X^0
2	-5	0	-8	1
2	$-5+2\bullet 2=-1$	$0+2(-1)=-2$	$-8+2(-2)=-12$	$1+2(-12)=-23$
b_3	b_2	b_1	b_0	r

Deci câtul şi restul împărţirii sunt $q=2X^3-X^2-2X-12$ şi $r=-23$.

I.7. Divizibilitatea polinoamelor

Def. $\forall f,g\in C[X]$, $\exists q,r\in C[X]$ aşa încât $f=g\bullet q+r$, cu $gradr<gradg$.

Spunem că f se divide la g $(f\vdots g)$ sau g divide pe f(g/f), dacă $r=0$.

- Proprietăţi

1. Reflexivitatea

$$f/f,\forall f\in C[X]$$

2. Simetria

$$f/g \text{ şi } g/f\Rightarrow\exists k\in C, \text{ a.î. } f=kg$$

În acest caz spunem că f este asociat cu g $(f\approx g)$

3. Tranzitivitatea

Dacă f/g şi $g/h\Rightarrow f/h$

4. Dacă f/g şi $f/h\Rightarrow f(g+h)\Rightarrow f/\lambda_1 g+\lambda_2 h$

- Cel mai mare divizor comun

Def. $\forall f,g\in C[X]$ $d=(f,g)$= C.m.m.d.c

1. d/f şi d/g
2. $\forall d'\in C[X], d'/f$ şi $d'/g\Rightarrow d'/d$

Algoritmul lui Euclid:

$$(f,g)=(g,r_1)=(r_1,r_2)=\ldots=(r_{n-1},r_n)=(r_n,r_0)$$

Cel mai mare divizor comun a două polinoame este unic până la înmulţirea cu o constantă(asociere).

Dacă $(f,g)=1$, atunci f şi g sunt prime între ele.

Exemplu: Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

$f = X^4 + X^3 - 2X^2 - 4X + 4$ şi $g = X^3 + X^2 + X - 3$.

Vom aplica algoritmul lui Euclid. Împărţim pe f la g.

$$\begin{array}{l|l} X^4 + X^3 - 2X^2 - 4X + 4 & X^3 + X^2 + X - 3 \\ \hline -X^4 - X^3 - X^2 + 3X & X \\ \hline -3X^2 - X + 4 & \end{array}$$

Pentru a evita coeficienţii fracţionari, vom înmulţi în prealabil pe g cu 3 şi restul împărţirii cu −1. împărţim acum împărţitorul la rest:

$$\begin{array}{l|l} 3X^3 + 3X^2 + 3X - 9 & 3X^2 + X - 4 \\ \hline -3X^3 - X^2 + 4X & \\ \hline 2X^2 + 7X - 9 & X \end{array}$$

Acum, pentru a evita din nou coeficienţii fracţionari, vom înmulţi pe $3X^2 + X - 4$ cu 2 şi continuăm operaţia.

$$\begin{array}{l|l} 6X^2 + 2X - 8 & 2X^2 + 7X - 9 \\ \hline -6X^2 - 21X + 27 & 3 \\ \hline -19X + 19 & \end{array}$$

Am obţinut restul $-19X + 19$. Pentru a evita din nou coeficienţii fracţionari, vom împărţi restul cu −19 şi împărţim împărţitorul la rest.

$$\begin{array}{l|l} 2X^2 + 7X - 9 & X - 1 \\ \hline -2X^2 + 2X & \\ \hline 9X - 9 & 2X + 9 \\ -9X + 9 & \\ \hline -- \quad -- & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este polinomul $X - 1$ şi deci $(f, g) = X - 1$.

- Cel mai mic multiplu comun

Def. Fie f şi g două polinoame. Un polinom m se numeşte cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f şi g dacă verifică următoarele condiţii:

1. f/m şi g/m
2. $\forall m'$, f/m' şi $g/m' \Rightarrow m/m'$

Dacă d este c.m.m.d.c al lui f şi g, atunci $m = \frac{fg}{d}$.

I.8. Rădăcinile polinoamelor.

- Teorema lui Bezout:

Fie $f \neq 0$ un polinom. Atunci numărul $a \in C$ este rădăcină a polinomului f dacă şi numai dacă $X - a$ divide f.

- Teorema fundamentală a algebrei

Orice ecuaţie algebrică $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 = 0$ de grad mai mare sau egal cu 1 şi cu coeficienţi complecşi are cel puţin o rădăcină complexă.

- Rădăcini simple şi multiple

Def. Fie $f \in C[X]$. $a \in C$ este rădăcină de ordin de multiplicitate m, dacă $(X-a)^m / f$ şi $(X-a)^{m+1}$ nu divide pe f.

Exemple:

$X - 1 / f$

$(X-1)^2$ nu divide f $\Rightarrow X = 1$ este rădăcină de ordin de multiplicitate 1(răd. simplă).

$f = (X-1)^3 (X+1)(X^2+1)$. Descompunând în factori ireductibili vom obţine:

$f = (X-1)^3 (X+1)(X-i)(X+i)$, unde:

1= rădăcină de ordin de multiplicitate 3

i,-i,-1= rădăcini de ordin de multiplicitate 1

- Teorema de descompunere în factori ireductibili(primi)

Fie $f \in C[X]$ şi $x_1, x_2, ..., x_n$ rădăcinile sale în C, nu neaparat distincte. Atunci: (în C[X])

$$f = a_n(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_n) = a_n(X - x_1)^{m_1}(X - x_2)^{m_2}...(X - x_n)^{m_p}$$

$$m_1 + m_2 + ... + m_p = gradf = n$$

Singurii factori ireductibili(primi) în C[X] sunt polinoamele de gradul I.

- Relaţiile lui Francois Viete

Fie $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$, un polinom de grad n. Dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt rădăcinile lui f, atunci:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n(-1)} \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + ... + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n(-1)^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_k = x_1x_2..x_k + x_1x_2..x_{k-1}x_{k+1} + ... + a_{n-k+1}a_{n-k+2}..a_n = \dfrac{a_{n-k}}{a_n(-1)^k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P = \dfrac{a_0}{a_n(-1)^n} \end{cases}$$

$$X^n + (-1)^{n-1}S_1 + (-1)^{n-2}S_2 + ... + (-1)^{n-k}S_k + ... + (-1)S_n + P = 0$$

II. Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali

Fie $f \in R[X]$ şi ecuaţia $f(x)=0$.

Dacă $x_1 = a+bi \in C-R$ este rădăcină pentru f, atunci $x_2 = a-bi$ este rădăcină pentru f, iar x_1 şi x_x au aceeaşi multiplicitate.

- Demonstraţie

$$f(x_1)=0 \Leftrightarrow f(a+bi)=0$$

$$f(x_2)=f(a-bi)=f(\overline{x_1})=a_n\overline{x_1}^{\,n}+a_{n-1}\overline{x_1}^{\,n-1}+\ldots+a_1\overline{x_1}+a_0$$

$$z \in R_e \Rightarrow z=\overline{z} \Rightarrow \overline{a_n X_1^{\,n}}+\overline{a_{n-1}X_1^{\,n-1}}+\ldots+\overline{a_1X_1}+\overline{a_0}=\overline{f(x_1)}=0$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x_1)=(X-x_1)^m \bullet g(X) & x_2=\overline{x_1} \\ f(x_2)=(X-x_2)^{m'} \bullet g(X) & f \in R[X] \end{array}\right\} \Rightarrow m=m'.$$

- Teorema de descompunere în factori ireductibili

În R[X]:

$$f=\prod(ax+b)^m \bullet \prod(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{m!}$$

Singurele polinoame prime din R[X] sunt:

1. polinoamele de gradul I
2. polinoamele de gradul II cu $\Delta<0$.

III. Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi raţionali şi respectiv întregi

$$C[X] \subset R[X] \subset Q[X] \subset Z[X]$$

Fie $f \in Q[X]$. Atunci dacă $x_1 = a+\sqrt{b}$ este rădăcină pentru f, cu $a \in Q, \sqrt{b} \notin Q, \sqrt{b} \in R-Q$, atunci $x_2 = a-\sqrt{b}$ este rădăcină pentru f şi x_1 şi x_2 au aceeaşi multiplicitate.

Exemplu: $f=X^4-4X^3+X^2+6X+2$

$x_1=1-\sqrt{2} \Rightarrow x_2=1+\sqrt{2}$ este rădăcină.

$$\Rightarrow f \vdots (X-1+\sqrt{2})(X-1-\sqrt{2}) \Rightarrow f \vdots (X^2-(x_1+x_2)X+x_1x_2)$$
$$\Rightarrow f \vdots (X^2-2X-1)$$
$$f=(X^2-2X-1)(X^2-2X-2) \Rightarrow x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}$$

Fie $f \in Z[X]$ şi ecuaţia $f(x)=0$
$\Rightarrow a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0=0$

Dacă f admite o rădăcină de forma $x_1=\frac{p}{q}$, $p,q \in Z$, atunci p/a_0 şi q/a_n. Dacă $a_n=1$, atunci $x_1=p$.

Exemplu:

Fie $f=X^4-2X^3-5X^2+8X+4=0$ admite soluţia $x_1=\frac{p}{q} \Rightarrow p/4, q/1$. Deci $\Rightarrow x_1 \in \{\pm1;\pm2;\pm4\}$

Împărţind succesiv polinomul la posibilele radacini, obţinem: $f=(X-2)(X+2)(X^2-2X-1) \Rightarrow x_1=2; x_2=-2; x_{3,4}=1\pm\sqrt{2} \in R-Q$

IV. Aplicaţii

IV.1. Probleme rezolvate

1.Să se determine m şi n şi apoi să se rezolve ecuaţia $X^4-X^3+mX^2+2X+2=0$ ştiind că admite rădăcina $1+i$.

Dacă $f(1+i)=0 \Rightarrow f(1-i)=0 \Rightarrow f \vdots (X-1-i)(X-1+i)$
$$f \vdots (X^2-X+iX-X+1-i-iX+i+1) \Leftrightarrow f \vdots (X^2-2X+2)$$

$$\begin{array}{l|l} X^4-X^3+mX^2+2X+n & X^2-2X+2 \\ -X^4+2X^3-2X^2 & \\ \hline X^3+X^2(m-2)+2X+n & X^2+X+m \\ -X^3+2X^2-2X & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} mX^2+n \\ \underline{-mX^2+2mX-2m} \\ 2mX-2m+n \end{array}$$

$$2mX-2m+n=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ n=0 \end{cases}$$

Dacă $m=0 \Rightarrow q(x)=X^2+X \Rightarrow x_3=0, x_4=-1 \Rightarrow x \in \{0;-1;1\pm i\}$.

2.Să se arate că polinomul $X^{4a}+X^{4b+1}+X^{4c+2}+X^{4d+3}$, cu $(a,b,c,d \in N)$ este divizibil prin X^3+X^2+X+1

$$X^3+X^2+X+1=(X+1)(X+i)(X-i)$$

$$f(-1)=(-1)^{4a}+(-1)^{4b+1}+(-1)^{4c+2}+(-1)^{4d+3}=1-1+1-1=0$$

$$f(-i)=(-i)^{4a}+(-i)^{4b+1}+(-i)^{4c+2}+(-i)^{4d+3}=1+(-i)^{4b}(-i)+(-i)^{4c}(-i)^2+(-i)^{4d}(-i)^3$$
$$=1-i-1+i=0$$

$$f(i)=i^{4a}+i^{4b+1}+i^{4c+2}+i^{4d+3}=1+i-1-i=0$$

Dacă $\left\{\begin{array}{l} f(-i)=0 \\ f(i)=0 \\ f(-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow X^{4a}+X^{4b+1}+X^{4c+2}+X^{4d+3} \vdots (X^3+X^2+X+1)$

3. Fie $f=X^{23}-2X^{22}+3X^{21}+3X^5-X^4-4$. Fie $S=x_1^2+x_2^2+...+x_{23}^2$, unde x_i este rădăcină a lui f. Atunci:

$a)S=1$; $b)S=2$; $c)S=-2$; $d)S=-4$

$$x_1^2+x_2^2+...+x_{23}^2=(x_1+x_2+...+x_{23})^2-2(x_1x_2+...+x_{22}x_{23})=2^2-2\bullet 3=4-6=-2$$

R:c)

4.Restul împărţirii lui f la X^2-1 este:

$a)0$; $b)X$; $c)7X-7$; $d)149X+135$.

$$X^2-1=(X-1)(X+1)$$

$$X^{23}-2X^{22}+3X^{21}+3X^5-X^4-4=(X^2-1)Q(x)+r$$

Fie α o rădăcină a ecuaţiei $X^2-1=0 \Rightarrow \alpha^2-1=0 \Leftrightarrow \alpha^2=1$

$$r=f(\alpha)=\alpha^{23}-2\alpha^{22}+3\alpha^{21}+3\alpha^5-\alpha^4-4=(\alpha^2)^{11}\bullet\alpha-2(\alpha^2)^{11}+3(\alpha^2)^{10}\bullet\alpha$$
$$-(\alpha^2)^2-4=\alpha-2+3\alpha+3\alpha-1-4=7\alpha-7$$

Deci restul împărţirii lui f la X^2-1 este $7X-7$. R:c).

5. Dacă $P=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n\in R[X], n\in N, n\geq 3, a_n\neq 0$ şi $a_{n-k}=a_k, k=\overline{0,n}$. Atunci relaţia dintre $P\left(\frac{1}{X}\right)$ şi $P(X)$ este:

$a)P(X)=P\left(\frac{1}{X}\right), \forall x\in R^*;$ $b)X^{n-1}P\left(\frac{1}{X}\right)=P(X), \forall x\in R^*;$

$c)X^nP\left(\frac{1}{X}\right)=P(X), \forall x\in R^*;$ $c)X^{n+1}P\left(\frac{1}{X}\right)=P(X), \forall x\in R^*.$

Dacă $a_{n-k}=a_k, k=\overline{0,n}$ atunci:

$$\left.\begin{array}{l} k=0\Rightarrow a_n=a_0 \\ k=1\Rightarrow a_{n-1}=a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ k=n\Rightarrow a_0=a_n \end{array}\right\}\Rightarrow P(X)$$ se mai poate scrie, echivalent,

sub forma:

$$P(X)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+a_2X^{n-2}+...+a_{n-2}X^2+a_{n-1}X+a_n$$

$$P\left(\frac{1}{X}\right)=a_0+a_1\frac{1}{X}+a_2\frac{1}{X^2}+...+a_nX^n \quad /\bullet X^n$$

$$\Rightarrow X^n\bullet P\left(\frac{1}{X}\right)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+a_2X^{n-2}+...+a_n=P(X)\Rightarrow X^n\bullet P\left(\frac{1}{X}\right)=P(X)$$

R:c).

6. Fie ecuaţia $mX^3+X^2+(m-1)X+3=0, m\in R^*$ fiind parametru. Mulţimea valorilor lui m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 0$ este:

a. $m\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right);$ b. $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right];$

c. $\left(0;\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right];$ d. $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]\setminus\{0\}.$

$mX^3+X^2+(m-1)X+3=0, m\in R^*.$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=\left(-\frac{1}{m}\right)^2-2\left(\frac{m-1}{m}\right)=$$

$$=\frac{1}{m^2}-\frac{2(m-1)}{m}\leq 0\Leftrightarrow 1-2m(m-1)\leq 0$$

$\Leftrightarrow 2m^2-2m-1\geq 0$

$$\Delta = 4+8 = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3} \Rightarrow m_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Deci $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$. R:a).

7. Valoarea expresiei:

$E = \frac{x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_1+x_3}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_3}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $X^3 - 6X^2 + X + 2$ este:

a. -3; b. -1; c. -6; d. 3.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 6 \\ x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$E = \frac{6-x_1}{x_1} + \frac{6-x_2}{x_2} + \frac{6-x_3}{x_3} = \frac{6}{x_1} - 1 + \frac{6}{x_2} - 1 + \frac{6}{x_3} - 1 = 6\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) - 3$$

$$= 6\left(\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3}\right) - 3 = 6\left(\frac{1}{-2}\right) - 3 = -3 - 3 = -6$$

R:c).

8. Fie $x_1, x_2, ..., x_{199}$ rădăcinile ecuaţiei $X^{199} + 10X - 5 = 0$. Atunci suma $S = x_1^{199} + x_2^{199} + ... + x_{199}^{199}$ are valoarea:

a. $S = 1000$; b. $S = 995$; c. $S = 0$; d. $S = -50$.

Dacă $x_1, x_2, ..., x_{199}$ sunt rădăcini, atunci fiecare din ele verifică ecuaţia:

$$x_1^{199} + 10x_1 - 5 = 0$$
$$x_2^{199} + 10x_2 - 5 = 0$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$x_{199}^{199} + 10x_{199} - 5 = 0$$

$$x_1^{199} + x_2^{199} + ... + x_{199}^{199} = -10(x_1 + x_2 + ... + x_{199}) + 5 \bullet 199 = -10 \bullet 0 + 995 = 995$$

R:b).

9. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = X^2 + aX + b$, $a, b \in Q$. Suma modulelor radacinilor ecuaţiei $f(x) = 0$ este:

a. $|a|$; b. $\sqrt{a^2 - 4b}$ pentru $b < 0$; c. $\sqrt{a^2 + 4b}$ pentru $b \geq 0$

d. $|b|$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b \end{cases} \qquad x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2b .$$

$$\Rightarrow x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = a^2 - 2b = |x_1|^2 + |x_2|^2 = (|x_1| + |x_2|)^2 - 2|x_1 x_2|$$

$$\Rightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = a^2 - 2b + 2|b| \Rightarrow |x_1| + |x_2| = \sqrt{a^2 - 2b + 2|b|}$$

Dacă $b < 0 \Rightarrow |x_1| + |x_2| = \sqrt{a^2 - 4b}$. R:b).

10.Restul împărţirii lui $f = X^n$ la $g = X^2 - X - 2$ este:

a. $X + 1$; b. $X - 1$; c. $(4n+1)X + 2$; d. $\frac{2^n - (-1)^n}{3} X + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$.

$$X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$$

$f = X^n = q(x) \bullet (X + 1)(X - 2) + aX + b$, unde $aX + b = r$, $gradr < gradg$.

Pentru $x = -1 \Rightarrow (-1)^n = -a + b$

Pentru $x = 2 \Rightarrow 2^n = 2a + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + b = (-1)^n \\ 2a + b = 2^n \end{cases} \quad (-)$$

$$-3a = (-1)^n - 2^n \Leftrightarrow 3a = 2^n - (-1)^n \Rightarrow a = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

$$b = (-1)^n + a = (-1)^n + \frac{2^n - (-1)^n}{3} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \Rightarrow b = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} .$$

Deci $r = \frac{2^n - (-1)^n}{3} X + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$. R:d).

IV.2. Probleme propuse

1. Fie $f = X^3 - X + 3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile y_1, y_2.

$f(y_1) + f(y_2)$ este:

a. 5; b. 7; c. 9; d. 1.

2. $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$ este:

a. 1; b. 5; c. 7; d. 3.

3. Să se determine $m \in R$, ştiind că ecuaţia $X^3 + mX^2 - X - 3 = 0$ are rădăcinile în progresie aritmetică.

4. Polinomul $f \in Q[X]$ are gradul 5 şi $f(0) = f(1+i) = f(1+\sqrt{2}) = 1$. Atunci suma rădăcinilor lui f este:

a. 0; b. −1; c. 3; d. 4.

5. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = X^2 + X + 9$. Suma $f(1) + f(2) + ... + f(50)$ este :

a. 89300 b. 44650 c. 44600 d. 45000.

6. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = (m-1)X^2 + (m-1)X - m + 2$ cu $m \in R \setminus \{1\}$. Soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $f(x) = -1$, pentru m=2 verifică relaţia $x_1^{2004} + x_2^{2004} = \alpha$. Atunci α este:

a. 1; b. i; c. 2; d. 1-i.

7. Se consideră polinoamele $f = X^3 - X + 3$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi $g = X^2 + X + 1$, cu răd. y_1, y_2. Restul împărţirii lui $g(3-2X)$ la $X - 2$ este:

a. 7; b. 5; c. 1; d. −1.

8. Rădăcina reală a lui f este situată în intervalul:

a. $(0,1)$; b. $(-2,-1)$ c. $(-1,1)$; d. $(1,\sqrt{3})$.