PUTERI ŞI RADICALI

Puteri cu exponent natural:

- a^n unde $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $a^0=1$;
- $a^1=a$;
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de n ori}}$;
- a – baza puterii;
- n – exponentul puterii;
- $(ab)^n=a^n b^n$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
- $(a^m)^n=a^{mn}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $m,n \in \mathbb{N}^*$;
- $a^m \cdot a^n=a^{m+n}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $m,n \in \mathbb{N}^*$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $m,n \in \mathbb{N}^*$, $m>n$.

Puteri cu exponent întreg negativ:

- $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ unde $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$;
- restul proprietăţilor se păstrează.

Puteri cu exponent raţional pozitiv:

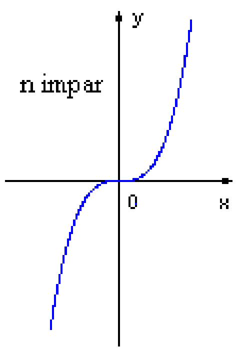
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$;
- $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$, $a \geq 0$, $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$;
- $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$, $a,b \geq 0$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$, $a \geq 0$, $b>0$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$;
- $\left((a)^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$, $a \geq 0$, $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$;
- $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$, $a>0$, $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$, $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$.

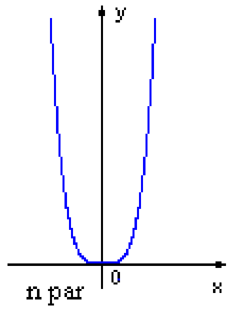
Puteri cu exponent raţional negativ:

- $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, $a>0$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$;
- restul proprietăţilor se păstrează.

Funcţia putere cu exponent natural nenul:

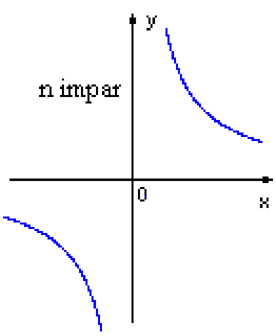
- $f(x)=x^n$, $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
- monotonia: $\begin{cases} n \text{ par} \Rightarrow f(x) \text{ strict descrescatoare pe } (-\infty, 0] \\ n \text{ par} \Rightarrow f(x) \text{ strict crescatoare pe } [0, \infty) \\ n \text{ impar} \Rightarrow f(x) \text{ strict crescatoare pe R} \end{cases}$;
- paritate: $\begin{cases} n \text{ par} \Rightarrow f(x) \text{ para, graficul simetric fata de OY} \\ n \text{ impar} \Rightarrow f(x) \text{ impara, graficul simetric fata de origine} \end{cases}$;
- semn: $\begin{cases} x > 0, n \in N, n \geq 2 \Rightarrow f(x) > 0 \\ x < 0, n \text{ par} \Rightarrow f(x) > 0 \\ x < 0, n \text{ impar} \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$.

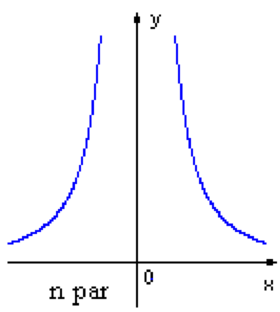




Funcţia putere cu exponent întreg negativ:

- $f(x)=x^{-n}$, $f:\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
- monotonia: $\begin{cases} n \text{ par} \Rightarrow f(x) \text{ strict crescatoare pe } (-\infty, 0) \\ n \text{ par} \Rightarrow f(x) \text{ strict descrescatoare pe } (0, \infty) \\ n \text{ impar} \Rightarrow f(x) \text{ strict descrescatoare pe R - } \{0\} \end{cases}$;





- paritate: $\begin{matrix} n \text{ par} \Rightarrow f(x) \text{ para, graficul simetric fata de OY} \\ n \text{ impar} \Rightarrow f(x) \text{ impara, graficul simetric fata de origine} \end{matrix}$;
- semn: $\begin{matrix} x > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow f(x) > 0 \\ x < 0, n \text{ par} \Rightarrow f(x) > 0 \\ x < 0, n \text{ impar} \Rightarrow f(x) < 0 \end{matrix}$.

Funcţia putere cu exponent raţional:

- f(x)=$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, f:(0, ∞) →(0, ∞), $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$;
- dacă $\frac{m}{n}>0 \Rightarrow$ f strict crescătoare;
- dacă $\frac{m}{n}<0 \Rightarrow$ f strict descrescătoare.

Radicalul unui număr pozitiv:

- ecuaţia $x^n-a=0$ ($n\in$|N, $n\geq 2$, $a\in$|R, $a>0$) are o singură rădăcină reală pozitivă;
- dacă a>0, n∈|N, n≥2 se numeşte *radical de ordin n din a*, numărul pozitiv a cărui putere a n-a este a;
- notaţie x=$\sqrt[n]{a}$;
- notaţie $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$;
- $\sqrt[n]{0}=0$;
- $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$;

Radicalul de ordin impar al unui număr negativ:

- ecuaţia x^n-a=0 (n∈|N, n≥2, n impar, a∈|R, a<0) are o singură rădăcină reală negativă;
- dacă a<0, n∈|N, n≥2, n impar, se numeşte *radical de ordin n din a*, numărul negativ a cărui putere a n-a este a;
- notaţie x=$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$;

Proprietăţile radicalilor: ∀ m, n, k∈$\mathbb{N}^*$, m, n, k≥2

- P1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, ∀a,b≥0;
- P2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, ∀ a≥0, b>0;
- P3) $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$, ∀ a≥0;
- P4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, ∀ a≥0;
- P5) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, ∀ a≥0;
- P6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, ∀ a≥0.

Operaţii cu radicali:

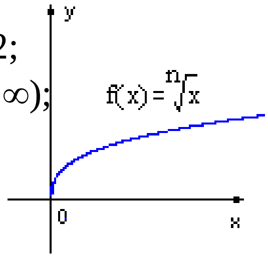
1. *scoaterea unui factor de sub semnul radical*: se descompune numărul de sub radical în factori, se aplică proprietăţile 1, 3 şi 5;
2. *introducerea unui factor sub semnul radical*: se utilizează proprietăţile 1, 3 şi 5;
3. *înmulţirea radicalilor* de acelaşi ordin sau ordine diferite: se utilizează proprietatea 1 şi 5;
   - $\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$, a_1, a_2, …, $a_k \geq 0$;
   - $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \cdot \sqrt[nm]{b^n} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$, a, b≥0;
4. *împărţirea radicalilor* de acelaşi ordin sau ordine diferite: se utilizează proprietăţile 2 şi 5;
   - $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, ∀ a≥0, b>0;
   - $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[nm]{a^m}}{\sqrt[nm]{b^n}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}$, ∀ a≥0, b>0;
5. *raţionalizarea numitorilor*:
   - operaţia de eliminare a radicalilor de la numitorul fracţiilor;

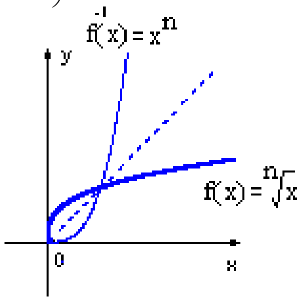
- expresii conjugate: - expresii cu radicali care prin înmulţire dau o expresie fără radicali;

- $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$, a, b≥0;
- $\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a\pm b$, a, b≥0;
- $\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a-b$, a, b≥0;
- $\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a+b$, a, b≥0, n impar;

Funcţia radical:

- f(x)= $\sqrt[n]{x}$, f:[0, ∞)→[0, ∞), n∈|N, n≥2;
- monotonia: f strict crescătoare pe [0, ∞);
- f(x)≥0 ∀x∈[0, ∞);
- funcţia este bijectivă;
- inversa ei este funcţia putere.
- f(x)= $\sqrt[n]{x}$, f:|R→|R, n∈|N, n≥2, n impar;





Ecuaţii iraţionale:

- ecuaţii care conţin necunoscuta sub semnul radical;
- rezolvarea constă în eliminarea radicalilor prin diferite transformări (ridicări la putere = cu ordinul radicalului, înmulţire cu expresia conjugată), reducându-le la ecuaţii studiate;
- condiţii de existenţă numai pentru radicali de ordin par $\sqrt[2k]{f(x)}$: *f(x)≥0* unde f(x) este o expresie în funcţie de x;