Regula lui l'Hospital

Folosind derivatele se poate stabili o metoda generala care acopera multe din situatiile intalnite si face calculul limitelor mai simplu.

a)Incepem cu examinarea cazului $\frac{0}{0}$, mai precis al limitelor de forma

$$\lim_{X\to X0}\frac{f(x)}{g(x)}\ unde\ \lim_{X\to X0} f(x)=0, x_0\in R.$$

Prelucrand convenabil raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ si aplicand teoreme asupra limitelor, putem calcula limita acestuia.

<u>**Regula lui l'Hospital.**</u>**Fixam doua functii reale *f,g*definite pe un interval<a,b>**
si un punct X_0 ε <a,b>.Presupunem satisfacute urmatoarele conditii:
1.*f* si *g* sunt derivabile pe <a,b>\\X_0 si continue in X_0;
2.*$f(X_0)=0,g(X_0)=0$;*
3.*g'(X)* nu se anuleaza intr-o vecinatate V a lui X_0($\forall$ XεV\\X_0);
4.exista limita $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$

In aceste conditii,exista limita $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$

Demonstratie.Aplicand teorema lui Cauchy rezulta ca pentru orice x ε [a,b] $\cap$ V, $\frac{f(x)}{g(x)}==\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$,cu $c=c_x$ situat intre x_0 si x.Daca $x\to x_0$,atunci $c_x\to x_0$ si ,folosind ipoteza 4 rezulta ca $\frac{f(x)}{g(x)}\to\lambda$ pentru $x\to x_0$.Trebuie observat ca nu este nevoie ca f si g sa fie derivabile si in punctulx_0;subliniem de asemenea,includerea cazului cand $\lambda=+\infty$ sau $\lambda=-\infty$.

O situatie des intalnita este urmatoarea.Se cere $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$,stiind ca lim

$f(x)=0 \lim g(x)$,fara ca functiile *f* si *g* sa fie ambele definite in punctul x_0.Are loc analogul teoremei enuntate (pentru limite la stanga)si anume:

Fie $f,g:[a,x_0]\to R$.Presupunem satisfacute urmatoarele conditii:

1.*f* si *g* derivabile pe (a,x_0);

2.$\lim f(x) = \lim g(x) = 0$;

3.$g(x)$ si $g'(x)$ nu se anuleaza intr-o vecinatate V a lui x_0,($\forall x \in V \cap (a,x_0)$);

4.Exista $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$

In aceste conditii,$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ exista si este egala cu λ.

Demonstratia este imediata,de indata ce remarcam ca functiile f_1, g_1 : $:[a,x_0]\to R$,$f_1(x)=f(x)$,daca $x \in [a,x_0]$,$f_1(x_0)=0$;$g_1(x)=g(x)$,daca $x \in [a,x_0]$ si $g_1(x_0)=0$ sunt continue pe $[a,x_0]$ (ele sunt prelungirile prin continuitate in punctul $x=x_0$ ale lui f,respectiv g) si ca se verifica conditiile regulii lui l'Hospital.

Desigur are loc o teorema similara,inlocuind intervalul $[a,x_0]$ cu intervalul $[x_0,b]$,pentru limite la dreapta.

b)Regula lui l'Hospital ne permite sa tratam si alte cazuri exceptate de pilda cazul $\frac{\infty}{\infty}$.Daca ne intereseaza $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ si daca $f(x)\to\infty$,$g(x)\to\infty$,atunci putem scrie $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ si atunci $\frac{1}{g(x)} \to 0$, $\frac{1}{f(x)} \to 0$,reducandu-ne astfel la cazul $\frac{0}{0}$,studiat anterior.

c)Este interesant ca regula lui l'Hospital se aplica nu numai pentru x_0 finit,dar si in cazul cand x_0 este "aruncat la infinit".Are loc atunci:

Fie *f* si *g* doua functii reale definite pe un interval $[a,\infty)$,$a>0$.Presupunem ca:

1.*f* si *g* sunt derivabile pe $[a,\infty)$;

2.lim f(x) = lim g(x) = *l*,unde *l* = 0,∞ sau -∞;
3.g'(x) ≠ 0pentru orice x suficient de mare(x≥A,A≥a);

4.Exista $\lambda = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$**;**

Atunci exista si limita $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$**,egala cu λ.**

(un enunt similar are loc pentru x→ -∞)

Demonstratie.Presupunem l = 0.Facem schimbarea de variabila $x = \frac{1}{u}$.

Intervalul [a,∞) se transforma in $(0,\frac{1}{a})$ in sensul ca,daca x ε [a,∞),atunci u ε $(0,\frac{1}{a}]$ si reciproc. Notam $\varphi(u) = f(\frac{1}{u})$,$\delta(u)=g(\frac{1}{u})$;deoarece *l*=0,avem lim φ(u) = lim δ(u) = 0.Derivatele lor vor fi $\varphi'(u) = -\frac{1}{u}f'(\frac{1}{u})$, $\delta'(u) = -\frac{1}{u}g'(\frac{1}{u})$.Putem aplica functiilor φ si δ teorema 2 si rezulta:

$$\lim_{X\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{U\to 0}\frac{f(\frac{1}{u})}{g(\frac{1}{u})} = \lim_{U\to 0}\frac{\varphi(u)}{\delta(u)} \overset{l'H}{=} \lim_{U\to 0}\frac{\varphi'(u)}{\delta'(u)} = \lim_{U\to 0}\frac{-\frac{1}{u^2}f'(\frac{1}{u})}{-\frac{1}{u^2}g'(\frac{1}{u})} =$$

$$= \lim_{U\to 0}\frac{f'(\frac{1}{u})}{g'(\frac{1}{u})} = \lim_{X\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

Cazul *l* =∞ sau *l*=-∞ rezulta din b).

In calculul limitelor de functii se recomanda combinarea metodelor elementare cu regula lui l'Hospital.

Cazurile considerate anterior acopera multe din situatiile intalnite. Retinem ca in conditiile teoremelor enuntate,existenta limitei catului derivatelor asigura existenta limitei catului initial,limitele respective fiind egale.

Pana acum am considerat numai cazurile $\frac{0}{0}$ si $\frac{\infty}{\infty}$.

In cazurile exceptate 0∗∞,∞-∞,0 ,∞ ,1 ,nu exista reguli de tip l’Hospital care sa fi direct aplicate si sunt necesare unele prelucrari ale functiei de sub limita.

$$1)\,0\circ\infty\, sau\, \infty\circ 0\ldots\ldots\ldots h(x)=f(x)\circ g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

$$2)\,\infty-\infty\ldots\ldots\ldots\ldots h(x)=f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\circ g(x)}}$$

$$3)\,1^{\infty}\, sau\, \infty^{0}\, sau\, 0^{0}\ldots\ldots h(x)=f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\circ\ln f(x)}$$

Aplicatii

1)Sa se calculeze ,folosind regula lui l’Hospital,urmatoarele limite:

$$a)\lim_{X\to 1}\frac{x^2-1}{2x-2}\overset{l'H}{=}\lim_{X\to 1}\frac{(x^2-1)'}{(2x-2)'}=\lim_{X\to 1}\frac{2x}{2}=\lim_{X\to 1}x=1$$

$$b)\lim_{X\to 2}\frac{x^2-4}{\sin(x-2)}\overset{l'H}{=}\lim_{X\to 2}\frac{(x^2-4)'}{(\sin(x-2))'}=\lim_{X\to 2}\frac{2x}{\cos(x-2)}=4$$

$$c)\lim_{X\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{2x}\overset{l'H}{=}\lim_{X\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)'}{(2x)'}=\lim_{X\to 0}\frac{\frac{1}{5\sqrt[5]{(1+x)^4}}}{2}=\frac{1}{10}$$

$$d)\lim_{X\to 1}\frac{\ln x}{2x-2}\overset{l'H}{=}\lim_{X\to 1}\frac{(\ln x)'}{2'}=-\lim_{X\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$e)\lim_{X\to 0}\frac{shx}{\sin x}=\lim_{X\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin x}\overset{l'H}{=}\lim_{X\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2\sin x)'}=\lim_{X\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2\cos x}=1$$

$$f)\lim_{X\to 1}\frac{1-x}{ctg\frac{\pi x}{2}}\overset{l'H}{=}\lim_{X\to 1}\frac{(1-x)'}{(ctg\frac{\pi x}{2})'}=\lim_{X\to 1}\frac{-1}{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}}=\lim_{X\to 1}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\lim_{X\to 1}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{(\frac{\pi x}{2})^2}\circ\frac{2x^2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

$$g)\lim_{X\to\infty}x(\pi-2arctgx)=\lim_{X\to\infty}\frac{\pi-arctgx}{\frac{1}{x}}\overset{l'H}{=}\lim_{X\to\infty}\frac{-2\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}}=2\lim_{X\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=2\lim_{X\to\infty}\frac{x^2}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=2$$

$$h)\lim_{X\to0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)=\lim_{X\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim_{X\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}\overset{l'H}{=}\lim_{X\to0}\frac{(\sin^2x-x^2\cos^2x)'}{(x^2\sin^2x)'}=$$

$$=\lim_{X\to0}\frac{2\sin x\cos x-2x\cos^2x+2x^2\cos x\sin x}{2x\sin^2x+x^2 2\sin x\cos x}=\lim_{X\to0}\frac{\cos x(\sin x-x\cos x+x^2\sin x)}{x\sin^2x+x^2\sin x\cos x}=\lim_{X\to0}\cos x\circ$$

$$\circ\lim_{X\to0}\frac{\sin x-x\cos x+x^2\sin x}{x\sin^2x+x^2\sin x\cos x}\overset{l'H}{=}1\circ\lim_{X\to0}\frac{(\sin x-x\cos x+x^2\sin x)'}{(x\sin^2x+x^2\sin x\cos x)'}=$$

$$=\lim_{X\to0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x+2\sin x-x^2\cos x}{\sin^2+2x\sin x\cos x+x^2\cos^2x-x^2\sin^2x}=\lim_{X\to0}\frac{x^2\left(\frac{\sin x}{x}+2\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)}{x^2\left(\frac{\sin^2x}{x^2}+2\frac{\sin x}{x}\cos x+\cos^2x-\sin^2x\right)}=$$

$$=\frac{2}{3}$$

$$g)\lim_{X\to\infty}\left(x-x^2\ln\frac{1+x}{x}\right)=\lim_{X\to\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}-\ln\frac{1+x}{x}\right)\right]=\lim_{X\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\frac{1+x}{x}}{\frac{1}{x^2}}\overset{l'H}{=}\lim_{X\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}-\ln\frac{1+x}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=$$

$$=\lim_{X\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{\left(\frac{1+x}{x}\right)'}{\frac{1+x}{x}}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{X\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x}\circ\frac{x-(1-x)}{x^2}}{\frac{2}{x^3}}=\lim_{X\to\infty}\frac{1+x-x}{x^2(1+x)}\circ\frac{x^3}{2}=\lim_{X\to\infty}\frac{x}{2(1+x)}\overset{l'H}{=}$$

$$\overset{l'H}{=}\lim_{X\to\infty}\frac{x'}{(2+2x)'}=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

2)Cum poate fi utilizata regula lui l’Hospital pentru a calcula:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in N}}(e^n+n)^{\frac{1}{n}}\ ?$$

consideram functia:

$$f(x)=(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$$

si aplicam limita:

$$\lim_{X\to\infty} f(x) = \lim_{X\to\infty}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{X\to\infty} \ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{X\to\infty} \frac{1}{x}\ln(e^x+x)} = e^{\lim_{X\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x}} \overset{l'H}{=} e^{\lim_{X\to\infty} \frac{\frac{(e^x+x)'}{e^x+x}}{1}} = e^{\lim_{X\to\infty} \frac{e^x+1}{e^{x+x}}} =$$

$$= e^{\lim_{X\to\infty} \frac{e^x(1+\frac{1}{e^x})}{e^x(1+\frac{x}{e^x})}} = e^{\frac{1+0}{1+0}} = e$$

2’:

$$\lim_{X\to\infty}\frac{x}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim_{X\to\infty}\frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{X\to\infty}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{X\to\infty}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \Leftrightarrow (\forall) X_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty ......avem... f(X_n) \overset{n\to\infty}{\to} e$$

$$fie...X_n = n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(e^n + n)^{\frac{1}{n}} = e$$

3)Sa se arate ca,desi limita:

$$\lim_{X\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$$

exista,regula lui l’Hospital nu poate fi aplicata aici direct.

$$f(x) = \frac{x-\sin x}{x+\cos x}$$

$$\lim_{X\to\infty} f(x) = \lim_{X\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x} \overset{l'H}{=} \lim_{X\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\cos x)'} = \lim_{X\to\infty}\frac{1-\cos x}{1-\sin x}$$

pentru x→∞ raportul f(x) nu are limita.

$$\lim_{X\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim_{X\to\infty}\frac{x(1-\frac{\sin x}{x})}{x(1+\frac{\cos x}{x})} = \lim_{X\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1$$

4)Se da functia f:R→R,f derivabila pe R cu derivata continua pe R si f’(a)≠0 pentru a fixat.Daca g,h sunt functii derivabile pe R cu derivata continua si daca g’(a)=h’(a)=0si h(a)≠0,atunci limita:

$$L = \lim_{X \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{f(x)h(x) - f(a)h(a)}$$

nu depinde de functia f.

$$L = \lim_{X \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{f(x)h(x) - f(a)h(a)} \overset{l'H}{=} \lim_{X \to a} \frac{(f(x)g(x) - f(a)g(a))'}{(f(x)h(x) - f(a)h(a))'} =$$

$$\lim_{X \to a} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{f'(x)h(x) + f(x)h'(x) - f'(a)h(a) - f(a)h'(a)} = \lim_{X \to a} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(a)g(a)}{f'(x)h(x) + f(x)h'(x) - f'(a)h(a)} =$$

$$= \frac{f'(a)g(a) + f(a)g'(a) - f'(a)g(a)}{f'(a)h(a) + f(a)h'(a) - f'(a)h(a)} = \frac{f(a)g'(a)}{f(a)h'(a)} = \frac{g'(a)}{h'(a)}$$

2. Regula lui l'Hospital

Teorema si Demonstratii

Teorema 1. (Regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$)

Considerăm funcţiile reale $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ şi un punct $x_0 \in [a,b]$. Presupunem că sunt satisfăcute următoarele condiţii:

a) f şi g sunt derivabile pe $[a,b] \setminus \{x_0\}$ şi continue în x_0;

b) $f(x_0) = 0, g(x_0) = 0$;

c) $g'(x)$ nu se anulează într-o vecinătate V a lui x_0;

d) există limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ în $\overline{\mathbf{R}}$.

În aceste condiţii există $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$

Demonstraţie

Aplicând teorema lui Cauchy funcţiilor f şi g $\Rightarrow$ pentru orice $x \in [a,b] \cap V$ există $c = c_x$ situat între x_0 şi x astfel încât $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \overset{conform \quad lui \quad b}{=} \frac{f(x)}{g(x)}$. Dacă $x \to x_0$ atunci $c_x \to x_0$

Trecând la limită în egalitatea de mai sus şi ţinând cont că $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ obţinem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda .$$

Exemplul 1. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$.

Considerăm funcţiile $f, g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R,\ f(x) = \sin x - \cos x,\ g(x) = x - \frac{\pi}{4}$. Pentru aceste funcţii

$f'(x) = \cos x + \sin x,\ g'(x) = 1$ şi $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Aplicând regula lui l'Hospital obţinem:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \overset{l'H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)'}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{1} = \sqrt{2} .$$

Exemplul 2. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 + m \cdot x)^n - (1 + n \cdot x)^m}{x^2}$, unde $m, n \in N, n, m \geq 2$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + m \cdot x)^n - (1 + n \cdot x)^m}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ caz de nedeterminare } \overset{l'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\left[(1 + m \cdot x)^n - (1 + n \cdot x)^m\right]'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{nm(1 + mx)^{n-1} - nm(1 + nx)^{m-1}}{2x} = \frac{0}{0} \text{ caz de nedeterminare}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\left[nm(1 + mx)^{n-1} - nm(1 + nx)^{m-1}\right]'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{nm^2(n-1)(1 + mx)^{n-1} - n^2 m(m-1)(1 + nx)^{m-2}}{2}$$

$$= \frac{nm(n - m)}{2} .$$

Teorema 2. (Regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$)

Fie $f, g : (a, b) \to \mathbf{R}$, două funcţii cu proprietăţile:

a) funcţiile f şi g sunt derivabile pe (a, b);

b) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \infty$

c) $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$;

d) există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbf{R}}$;

atunci există limita $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ şi are loc egalitatea $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demonstraţie

Considerăm x şi x_0 astfel încât $a < x < x_0 < b$. Funcţiile f, g verifică condiţiile din teorema lui Cauchy pe intervalul $[x, x_0]$. $\Rightarrow$ $\exists c = c(x) \in (x, x_0)$ astfel încât $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} - \frac{g(x_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Din condiţia d) $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice x cu $0 < x - a < \delta_1(\varepsilon)$ are loc inegalitatea $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, unde $l = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Alegem x_0 astfel încât $0 < x_0 - a < \delta_1(\varepsilon) \overset{c<x_0}{\Rightarrow} 0 < c - a < \delta_1(\varepsilon)$ şi $\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{1}{g(x)} = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice x cu $0 < x - a < \delta_2(\varepsilon)$ au loc inegalităţile $\left|\dfrac{f(x_0)}{g(x)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}, \left|\dfrac{f(x_0)}{g(x)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3l + \varepsilon}$

Din $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} + \dfrac{f(x_0)}{g(x)} - \dfrac{g(x_0)}{g(x)} \cdot \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow$

$\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - l\right| \leq \left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| + \left|\dfrac{f(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right| \cdot \left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3l + \varepsilon} \cdot \left(l + \dfrac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$, pentru $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$ cu $\delta(\varepsilon) = \min\left(\delta_2(\varepsilon), x_0 - a\right)$.

Prin urmare $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Observaţia 1. a) Teorema de mai sus rămâne adevărată dacă condiţia b) o înlocuim cu

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}|f(x)| = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}|g(x)| = \infty$$

b) Teorema de mai sus rămâne adevărată pentru $x \to a$ sau $\begin{matrix} x\to a \\ x<a \end{matrix}$ şi le fel pentru $x \to \pm\infty$, cu domeniile de definiţie ale funcţiilor f şi g corespunzătoare.

Exemplul 3. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \dfrac{tgx}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$.

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{tgx}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\infty}{-\infty} \text{ nedeterminare.}$$

Alegem funcţiile $f, g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R},\ f(x) = tgx, g(x) = \ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ care verifică condiţiile din regula lui l'Hospital. Aplicând această regulă obţinem:

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{tgx}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \overset{l'H}{=} \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{(tgx)'}{\left[\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]'} = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) \overset{x-\frac{\pi}{2}=y}{=} \lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}} \frac{y}{\sin^2 y} \overset{l'H}{=}$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}} \frac{1}{2\sin y\cos y} = -\infty$$

Exemplul 4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x(\pi - 2arctgx)$.

$$\lim_{x\to\infty} x(\pi - 2arctgx) = \infty\cdot 0 \text{ nedeterminare } = \lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(\pi-2arctgx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{-1} = 2.$$

Exemplul 5. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (e^{-\frac{1}{x}}\ln x)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(e^{-\frac{1}{x}}\ln x\right)=0\cdot\infty \text{ nedeterminare } =\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}\overset{l'H}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{-x}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{\infty}=0.$$